

RAUM · ZEIT · MATERIE

VORLESUNGEN ÜBER
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

HERMANN WEYL



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

Meiner Frau gewidmet

Vorwort.

Mit der Einsteinschen Relativitätstheorie hat das menschliche Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen. Es ist, als wäre plötzlich eine Wand zusammengebrochen, die uns von der Wahrheit trennte: nun liegen Weiten und Tiefen vor unserm Erkenntnisblick entriegelt da, deren Möglichkeit wir vorher nicht einmal ahnten. Der Erfassung der Vernunft, welche dem physischen Weltgeschehen innewohnt, sind wir einen gewaltigen Schritt näher gekommen.

Wenngleich in jüngster Zeit eine ganze Reihe mehr oder minder populärer Einführungen in die allgemeine Relativitätstheorie erschienen ist, mangelte es doch bislang an einer systematischen Darstellung. Darum hielt ich es für angezeigt, die vorliegenden, von mir im Sommersemester 1917 an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich gehaltenen Vorlesungen herauszugeben. Zugleich wollte ich an diesem großen Thema ein Beispiel geben für die gegenseitige Durchdringung philosophischen, mathematischen und physikalischen Denkens, die mir sehr am Herzen liegt; dies konnte nur durch einen völlig in sich geschlossenen Aufbau von Grund auf gelingen, der sich durchaus auf das Prinzipielle beschränkt. Aber ich habe meinen eigenen Forderungen in dieser Hinsicht nicht voll Genüge tun können: der Mathematiker behielt auf Kosten des Philosophen das Übergewicht.

Die beim Leser vorausgesetzten Vorkenntnisse beschränken sich auf ein Minimum. Nicht nur die spezielle Relativitätstheorie ist ausführlich abgehandelt, sogar Maxwellsche Theorie und analytische Geometrie sind kurz, unter Herausarbeitung der wesentlichsten Züge, entwickelt. Das lag im Plane des Ganzen. Die Begründung des Tensorkalküls — durch den allein die in Frage stehenden physikalischen Erkenntnisse ihren naturgemäßen Ausdruck finden können — nimmt einen verhältnismäßig breiten Raum ein. So wird das Buch hoffentlich geeignet sein, den Physikern dieses mathematische Hilfsmittel vertrauter zu machen und zugleich als Lehrbuch unter der studierenden Jugend für die neuen Ideen zu wirken! In mathematischer Hinsicht glaube ich manches zur Vereinfachung und Vereinheitlichung beigetragen zu haben. Für die allgemeine Tensoranalysis konnte ich die Abhandlung von Herrn Levi-Civita in den Rend. del Circ. Matem. di Palermo Bd. 42 (1917) noch benutzen. Hessenbergs »Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie« [Math. Ann. Bd. 78 (1917)] erschien dagegen erst nach Vollendung des Manuskripts; nur den Beweis der Symmetrieeigenschaften der Riemannschen Krümmung habe ich noch nachträglich aus dieser Arbeit herübergenommen.

Die Einsteinsche Theorie in ihrem gegenwärtigen Zustande end mit einem Dualismus von Elektrizität und Gravitation, »Feld« und »Äther diese bleiben völlig isoliert nebeneinander stehen. Gerade jetzt eröffn sich dem Verfasser ein verheißungsvoller Weg, durch eine Erweiterung d geometrischen Grundlage beide Erscheinungsgebiete aus einer gemeinsam Quelle herzuleiten. So ist die Entwicklung der allgemeinen Relativitä theorie offenbar noch nicht zum Abschluß gekommen. Es lag aber au durchaus nicht in der Absicht dieses Buches, das auf dem Feld der phy kalischen Erkenntnis heute so besonders kräftig sich rührende Leben dem Punkt, den es im Augenblicke erreicht hat, mit axiomatischer Grün lichkeit in eine tote Mumie zu verwandeln. —

Den Herren Bär und Hiltbrunner bin ich, dem einen für Korrektu hilfe, dem andern für Anfertigung der Figuren, zu Dank verpflichtet; de Verlage für die unter den heutigen Umständen bewundernswerte rasc Drucklegung und gute Ausstattung der Buches.

Ribnitz in Mecklenburg, Ostern 1918.

Hermann Weyl.

Inhaltsverzeichnis.

Die Formeln sind in jedem Kapitel durchnumeriert. Formelverweise beziehen sich, wenn nichts anderes bemerkt ist, jeweils auf das gleiche Kapitel.

Einleitung.

Wir pflegen *Zeit und Raum* als die Existenz*formen* der realen Welt, die *Materie* als ihre *Substanz* aufzufassen. Ein bestimmtes Materiestück erfüllt in einem bestimmten Zeitmoment einen bestimmten Raumteil: in der daraus resultierenden Vorstellung der *Bewegung* gehen jene drei Grundbegriffe die innigste Verbindung ein. Von Descartes wurde es als Programm der exakten Naturwissenschaft aufgestellt, alles Geschehen von diesen Grundbegriffen aus zu konstruieren und damit auf Bewegung zurückzuführen. — Die tiefe Rätselhaftigkeit des *Zeitbewußtseins*, des zeitlichen Ablaufs der Welt, des Werdens ist vom menschlichen Geist, seit er zur Freiheit erwachte, immer empfunden worden; in ihr liegt eines jener letzten metaphysischen Probleme, um dessen Klärung und Lösung Philosophie durch die ganze Breite ihrer Geschichte unablässig gerungen hat. Der *Raum* ward durch die Griechen zum Gegenstand einer Wissenschaft von höchster Klarheit und Sicherheit. An ihm hat sich in der antiken Kultur die Idee der reinen Wissenschaft entfaltet, die Geometrie wurde zu einer der mächtigsten Kundgebungen des jene Kultur beseelenden Prinzips der Souveränität des Geistes. An die Geometrie hat sich, als die kirchlich-autoritative Weltanschauung des Mittelalters in die Brüche ging und die Wogen des Skeptizismus alles Feste hinwegzureißen drohten, der Wahrheitsglaube wie an einen Fels geklammert; und es konnte als das höchste Ideal aller Wissenschaft aufgestellt werden, »more geometrico« betrieben zu werden. Was endlich die *Materie* betrifft, so glaubten wir zu wissen, daß aller Veränderung eine Substanz, eben die Materie, zugrunde liegen müsse, daß jedes Stück der Materie als ein Quantum sich messen lasse und ihr Substanzcharakter seinen Ausdruck finde in dem Gesetz von der Erhaltung des in allen Veränderungen sich gleich bleibenden Materiequantums. Dieses unser bisheriges Wissen von Raum und Materie, durch die Philosophie vielfach als apriorische Erkenntnis von unbedingter Allgemeinheit und Notwendigkeit in Anspruch genommen, ist heute vollständig ins Wanken geraten. Nachdem die Physik unter den Händen Faradays und Maxwells der Materie als eine Realität anderer Kategorie das *Feld* gegenübergestellt hatte, nachdem auf der andern Seite die Mathematik durch ihre logische Minierarbeit im letztvergangenen Jahrhundert in aller Heimlichkeit das Vertrauen in die Evidenz der Euklidischen Geometrie untergraben hatte, kam in unsern Tagen der revolutionäre Sturm zum Ausbruch, der jene Vorstellungen über Raum, Zeit

und Materie, welche bis dahin als die festesten Stützen der Naturwisse schaft gegolten hatten, stürzte; doch nur, um Platz zu schaffen für ei freiere und tiefere Ansicht der Dinge. Diese Umwälzung wurde im w sentlichen vollzogen durch die Gedankenarbeit eines einzigen Mann Albert Einstein. Heute scheint die Entwicklung, was die Grundide betrifft, zu einem gewissen Abschluß gekommen zu sein; doch einer ob wir bereits vor einem neuen Definitivum stehen oder nicht — jeden Fall muß man sich mit dem Neuen, das da emporgekommen i auseinandersetzen. Auch gibt es kein Zurück; die Entwicklung des wiss schaftlichen Gedankens mag über das jetzt Erreichte abermals hina gehen, aber eine Rückkehr zu dem alten engen und starren Schema ausgeschlossen.

An den Problemen, die hier aufgeworfen werden, haben Philosoph Mathematik und Physik ihren Anteil. Uns soll aber vor allem die mat matisch-physikalische Seite der Fragen beschäftigen; auf die phi sophische werde ich nur ganz nebenher eingehen, aus dem einfac Grunde, weil in dieser Richtung etwas irgendwie Endgültiges bisher ni vorliegt und ich selber auch nicht imstande bin, auf die hergehöri erkenntnistheoretischen Fragen solche Antworten zu geben, die ich meinem Erkenntnisgewissen voll verantworten könnte. Die Ideen, wel es hier darzustellen gilt, sind nicht aus einer spekulativen Versenk in die Grundlagen physikalischer Erkenntnis hervorgegangen, sond haben sich im Ausbau der lebendig vorwärts drängenden Wissensch der die alte Schale zu eng wurde, an konkreten physikalischen Proble entwickelt; eine Revision der Prinzipien wurde jedesmal erst nachträg vollzogen und nur so weit, als es gerade die neu aufgetauchten Ideen heischten. Wie die Dinge heute liegen, bleibt den Einzelwissenscha nichts anderes übrig, als in diesem Sinne dogmatisch zu verfahren, d in gutem Glauben den Weg zu gehen, auf den sie durch vernünft im Rahmen ihrer eigentümlichen Methoden emporkommende Motive drängt werden. Die philosophische Klärung bleibt eine große Aufg von völlig anderer Art, als sie den Einzelwissenschaften zufällt; da nun der Philosoph zu; mit den Kettengewichten der in jener Aufg liegenden Schwierigkeiten behänge und behindere man aber nicht Vorwärtsschreiten der konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten Wis schaften.

Gleichwohl beginne ich mit einigen *philosophischen* Erörterungen. Menschen in der natürlichen Einstellung, in der wir unser tägliches Le führen, stehen uns in Akten der Wahrnehmung leibhaftig wirkliche Kör dinge gegenüber. Wir schreiben ihnen reale Existenz zu und wir neh sie hin als prinzipiell so beschaffen, so gestaltet, so gefärbt usw., sie uns da in der Wahrnehmung erscheinen (prinzipiell, d. h. vorbe lich aller als möglich zugegebenen Sinnestäuschungen, Spiegelun Träume, Halluzinationen usf.). Sie sind umgeben und durchsetzt einer ins Unbestimmte verschwimmenden Mannigfaltigkeit analoger V

lichkeiten, die sich alle zusammenfügen zu einer einzigen, immerdar vorhandenen räumlichen Welt, zu der ich selber mit meinem Einzelleib gehöre. Es handle sich hier nur um diese körperlichen Dinge, nicht um all die Gegenständlichkeiten andrer Art, die wir als natürliche Menschen sonst noch uns gegenüber haben: Lebewesen, Personen, Gebrauchsgegenstände, Werte, solche Wesenheiten wie Staat, Recht, Sprache u. dgl. Wohl bei jedem theoretisch gerichteten Menschen beginnt die philosophische Selbstbesinnung damit, daß er irre wird an dieser Weltanschauung des naiven Realismus, auf die ich da eben kurz hingewiesen habe. Man sieht ein, daß eine solche Qualität wie etwa »*grün*« nur als Korrelat der Grün-Empfindung an dem in der Wahrnehmung sich gebenden Gegenstande Existenz besitzt, daß es aber sinnlos ist, sie als eine Beschaffenheit *an sich* daseienden Dingen *an sich* anzuhängen. Diese *Erkenntnis von der Subjektivität der Sinnesqualitäten* tritt bei Galilei (wie bei Descartes und Hobbes) in engster Verbindung auf mit dem Grundsatz der *mathematisch-konstruktiven Methode unserer heutigen qualitätslosen Physik*, nach der z. B. die Farben »in Wirklichkeit« Ätherschwingungen, also Bewegungen sind. Erst Kant vollzog innerhalb der Philosophie mit völliger Klarheit den weiteren Schritt zu der Einsicht, daß nicht nur die sinnlichen Qualitäten, sondern auch der Raum und die räumlichen Merkmale keine objektive Bedeutung im absoluten Sinne besitzen, daß auch *der Raum nur eine Form unserer Anschauung* ist. Innerhalb der Physik ist es vielleicht erst durch die Relativitätstheorie ganz deutlich geworden, daß von dem uns in der Anschauung gegebenen Wesen von Raum und Zeit in die mathematisch konstruierte physikalische Welt nichts eingeht. Die Farben sind also »in Wirklichkeit« nicht einmal Ätherschwingungen, sondern mathematische Funktionsverläufe, wobei in den Funktionen, den drei Raum- und der einen Zeitdimension entsprechend, vier unabhängige Argumente auftreten.

In prinzipieller Allgemeinheit: die wirkliche Welt, jedes ihrer Bestandstücke und alle Bestimmungen an ihnen, sind und können nur gegeben sein als intentionale Objekte von Bewußtseinsakten. Das schlechthin Gegebene sind die Bewußtseinserlebnisse, die ich habe — so wie ich sie habe. Sie bestehen nun freilich keineswegs, wie die Positivisten vielfach behaupten, aus einem bloßen Stoff von Empfindungen, sondern in einer Wahrnehmung z. B. steht in der Tat leibhaft für mich da ein Gegenstand, auf welchen jenes Erlebnis in einer jedermann bekannten, aber nicht näher beschreibbaren, völlig eigentümlichen Weise bezogen ist, die mit Brentano durch den Ausdruck »*intentionales Objekt*« bezeichnet sein soll. Indem ich wahrnehme, sehe ich etwa diesen Stuhl, ich bin durchaus auf ihn gerichtet. Ich »*habe*« die Wahrnehmung, aber erst wenn ich diese Wahrnehmung selber wieder, wozu ich in einem freien Akt der Reflexion imstande bin, zum intentionalen Objekt einer neuen, inneren Wahrnehmung mache, »*weiß*« ich von ihr (und nicht bloß von dem Stuhl) etwas und stelle dies fest, was ich da eben gesagt

habe. In diesem zweiten Akt ist das intentionale Objekt ein *immanent*
nämlich wie der Akt selber ein reelles Bestandstück meines Erlebni
stromes; in dem primären Wahrnehmungsakt aber ist das Objekt *tran*
zendent, d. h. zwar gegeben in einem Bewußtseinserlebnis, aber nic
reelles Bestandstück. Das Immanente ist *absolut*, d. h. es ist genau d
als was ich es da habe, und dieses sein Wesen kann ich mir eventu
in Akten der Reflexion zur Gegebenheit bringen. Hingegen haben d
transzendenten Gegenstände nur ein *phänomenales* Sein, sie sind Ersch
nendes — in mannigfaltigen Erscheinungsweisen und »Abschattunger
Ein und dasselbe Blatt sieht so oder so groß aus, erscheint so oder
gefärbt, je nach meiner Stellung und der Beleuchtung; keine dieser E
scheinungsweisen kann für sich das Recht beanspruchen, das Blatt so
geben, wie es »an sich« ist. — In jeder Wahrnehmung liegt nun wei
unzweifelhaft die *Thesis der Wirklichkeit* des in ihr erscheinenden O
jekts, und zwar als Teil und inhaltliche Fortbestimmung der Gener
thesis einer wirklichen Welt. Aber indem wir von der natürlichen
philosophischen Einstellung übergehen, machen wir, über die Wahrn
mung reflektierend, diese Thesis sozusagen nicht mehr mit; wir k
statieren kühl, daß in ihr etwas als wirklich »vermeint« ist. Der S
und das Recht dieser Setzung wird uns jetzt gerade zum Probl
das von dem Bewußtseins-Gegebenen aus seine Lösung finden m
Ich meine also keineswegs, daß die Auffassung des Weltgeschehens
eines vom Ich produzierten Bewußtseins-Spiels gegenüber dem nai
Realismus die höhere Wahrheit enthalte; im Gegenteil. Nur darum h
delt es sich, daß man einsehe, das Bewußtseins-Gegebene ist der A
gangspunkt, in den wir uns stellen müssen, um Sinn und Recht
Wirklichkeitssetzung auf eine absolute Weise zu begreifen. Analog st
es auf logischem Gebiet. Ein Urteil, das ich fälle, behauptet ei
Sachverhalt; es setzt diesen Sachverhalt als wahr. Auch hier ents
die philosophische Frage nach dem Sinn und Recht dieser Wahrh
thesis; auch hier leugne ich nicht die Idee der objektiven Wahrh
aber sie wird zum Problem, das ich von dem absolut Gegebenen aus
begreifen habe. — Das »reine Bewußtsein« ist der Sitz des philoso
schen a priori. Hingegen muß und wird die philosophische Klär
der Wirklichkeitsthesis ergeben, daß keiner jener erfahrenden Akte
Wahrnehmung, Erinnerung usw., in denen ich Wirklichkeit erfasse,
letztes Recht dazu gibt, dem wahrgenommenen Gegenstande Exis
und die wahrgenommene Beschaffenheit zuzuschreiben; dieses Recht k
von einem auf andere Wahrnehmungen usw. sich stützenden immer
der überwogen werden. Es liegt im Wesen eines wirklichen Dinges,
Unerschöpfliches zu sein an Inhalt, dem wir uns nur durch immer n
zum Teil sich widersprechende Erfahrungen und deren Abgleich
begrenzt nähern können. In diesem Sinne ist das wirkliche Ding
Grenzidee. Darauf beruht der empirische Charakter aller Wirklichk
erkenntnis [1]).

Die Urform des Bewußtseinstromes ist die *Zeit.* Es ist eine Tatsache, sie mag so dunkel und rätselhaft für die Vernunft sein wie sie will, aber sie läßt sich nicht wegleugnen und wir müssen sie hinnehmen, daß die Bewußtseinsinhalte sich nicht geben als seiend schlechthin (wie etwa Begriffe, Zahlen u. dgl.), sondern als *jetzt-seiend*, die Form des dauernden Jetzt erfüllend mit einem wechselnden Gehalt; so daß es nicht heißt: dies *ist*, sondern: dies *ist jetzt*, doch *jetzt* nicht mehr. Reißen wir uns in der Reflexion heraus aus diesem Strom und stellen uns seinen Gehalt als ein Objekt gegenüber, so wird er uns zu einem *zeitlichen Ablauf*, dessen einzelne Stadien in der Beziehung des *früher und später* zueinander stehen.

Wie die Zeit die Form des Bewußtseinstromes, so, darf man mit Fug und Recht behaupten, ist der *Raum* die Form der körperlichen Wirklichkeit. Alle Momente körperlicher Dinge, wie sie in den Akten äußerer Wahrnehmung gegeben sind, Farbe z. B., haben das Auseinander der räumlichen Ausbreitung an sich. Aber erst indem sich aus allen unseren Erfahrungen eine einzige zusammenhängende reale Welt aufbaut, wird die in jeder Wahrnehmung gegebene räumliche Ausbreitung zu einem Teil des einen und selben Raumes, der alle Dinge umspannt. Dieser Raum ist *Form* der Außenwelt; das will sagen: jedes körperliche Ding kann, ohne irgendwie inhaltlich ein anderes zu sein als es ist, ebensogut an jeder anderen Raumstelle sein als gerade an dieser. Damit ist zugleich die *Homogenität* des Raumes gegeben, und hier liegt die eigentliche Wurzel des *Kongruenzbegriffs.*

Wäre es nun so, daß die Welt des Bewußtseins und der transzendenten Wirklichkeit völlig voneinander geschieden sind oder vielmehr nur das stille Hinblicken der Wahrnehmung die Brücke zwischen ihnen spannt, so bliebe es wohl dabei, wie ich es eben dargestellt habe: auf der einen Seite das in der Form des dauernden Jetzt sich wandelnde, aber raumlose Bewußtsein, auf der andern die räumlich ausgebreitete, aber zeitlose Wirklichkeit, von der jenes nur ein wechselndes Phänomen enthält. Ursprünglicher aber als alle Wahrnehmung ist in uns das Erleben von Streben und Widerstand, des Tuns und Leidens*). Für einen in natürlicher Aktivität lebenden Menschen dient die Wahrnehmung vor allem dazu, ihm den bestimmten Angriffspunkt seiner gewollten Tat und den Sitz ihrer Widerstände in bildhafter Klarheit vor das Bewußtsein zu rücken. Im Erleben des Tuns und Erleidens werde ich selbst mir zu einem einzelnen Individuum von psychischer Realität, geknüpft an einen Leib, der unter den körperlichen Dingen der Außenwelt seine Stelle im Raum hat und durch den hindurch ich mit andern Individuen meinesgleichen in Verbindung stehe; wird das Bewußtsein, ohne doch seine Immanenz preiszugeben, zu einem Stück der Wirklichkeit, zu diesem be-

*) Unsere Grammatik hat nur die Verbformen des activum und passivum; es gibt keine zum Ausdruck eines Geschehens, geschweige denn eines Sachverhalts.

sonderen Menschen, der ich bin, der geboren ward und sterben wird. Anderseits spannt aber dadurch auch das Bewußtsein seine Form, die Zeit, über die Wirklichkeit aus: in ihr selber ist darum Veränderung, Bewegung, Ablauf, Werden und Vergehen; und wie mein Wille durch meinen Leib hindurch als bewegende Tat in die reale Welt wirkend hinübergreift, so ist sie selber auch *wirkende* (wie ihr deutscher Name »Wirklichkeit« besagt), ihre Erscheinungen stehen in einem durchgängigen *Kausalzusammenhang* untereinander. In der Tat zeigt sich in der Physik, daß kosmische Zeit und Kausalität nicht voneinander zu trennen sind. Die neue Weise, in der die Relativitätstheorie das Problem der Verkopplung von Raum und Zeit in der Wirklichkeit löst, fällt zusammen mit einer neuen Einsicht in den Wirkungszusammenhang der Welt.

Der Gang unserer Betrachtungen ist damit klar vorgezeichnet. Was über die *Zeit für sich* zu sagen ist und über ihre mathematisch-begriffliche Erfassung, möge noch in dieser Einleitung Platz finden. Weit ausführlicher müssen wir dann vom Raume handeln. Das I. Kapitel ist dem *Euklidischen Raume* gewidmet und seiner mathematischen Konstruktion. Im II. Kapitel werden die Ideen entwickelt, welche über das Euklidische Schema hinausdrängen und im allgemeinen *Riemannschen Raumbegriff* ihren Abschluß finden. Darauf wird in einem III. Kapitel das eben erwähnte Problem der *Verkopplung von Raum und Zeit in der Welt* zu erörtern sein; von hier ab spielen die Erkenntnisse der Mechanik und Physik eine wichtige Rolle, weil dieses Problem seinem Wesen nach, wie bereits betont, an die Auffassung der Welt als einer wirkenden geknüpft ist. Die Synthese der im II. und III. Kapitel enthaltenen Gedanken wird uns dann in dem abschließenden Kapitel IV zu Einsteins *allgemeiner Relativitätstheorie* führen, in der in physikalischer Hinsicht eine neue Theorie der *Gravitation* enthalten ist. Von den Umwälzungen, die unsere Vorstellungen von Raum und Zeit darin erfahren, wird der *Begriff der Materie* sozusagen zwangsläufig miterfaßt werden; so daß, was darüber zu sagen ist, an der gehörigen Stelle im III. und IV. Kapitel zur Sprache kommen soll. —

Um an die *Zeit* mathematische Begriffe heranbringen zu können, müssen wir die ideelle Möglichkeit, in der Zeit ein streng punktuelles *Jetzt* z[u] setzen, die Aufweisbarkeit von Zeitpunkten zugeben. Von je zwei ver[...] schiedenen Zeitpunkten wird dann immer der eine der *frühere*, der ander[...] der *spätere* sein. Von dieser »Ordnungsbeziehung« gilt der Grundsatz[...] Ist A früher als B und B früher als C, so ist A früher als C. Je zw[...] Zeitpunkte AB, von denen A der frühere ist, begrenzen eine *Zeitstreck[...]* in sie hinein fällt jeder Punkt, der später als A, früher als B ist. D[...] die Zeit Form des Erlebnisstromes ist, kommt in der Idee der *Gleichh[...]* zum Ausdruck: der Erlebnisgehalt, welcher die Zeitstrecke AB erfü[...] kann an sich, ohne irgendwie ein anderer zu sein als er ist, in irge[...] eine andere Zeit fallen; die Zeitstrecke, die er dort erfüllen würde, ist [...] Strecke AB gleich. In der Physik ergibt sich daraus für die Gleich[...]

von Zeitstrecken der objektiven Zeit, unter Hinzuziehung des Kausalitätsprinzips, das folgende objektive Kriterium. Kehrt ein vollständig isoliertes (keine Einwirkung von außen erfahrendes) physikalisches System einmal genau zu demselben Zustand zurück, in dem es sich bereits in einem früheren Moment befand, so wiederholt sich von da ab die gleiche zeitliche Zustandsfolge, und der Vorgang ist ein zyklischer. Ein solches System nennen wir allgemein eine *Uhr*. Jede Periode hat die *gleiche* Zeitdauer.

Auf diese beiden Relationen, früher-später und gleich, stützt sich die mathematische Erfassung der Zeit durch das *Messen*. Wir versuchen, das Wesen des Messens kurz anzudeuten[2]). Die Zeit ist homogen, d. h. ein einzelner Zeitpunkt kann nur durch individuelle Aufweisung gegeben werden, es gibt keine im allgemeinen Wesen der Zeit gründende Eigenschaft, welche einem Zeitpunkt zukäme, einem andern aber nicht. In rein logischer Fassung: jede auf Grund der erwähnten beiden Urrelationen rein logisch zu definierende Eigenschaft kommt entweder allen Zeitpunkten oder keinem zu. Ebenso steht es noch mit den Zeitstrecken oder Punktepaaren: es gibt keine auf Grund jener beiden Urrelationen zu definierende Beziehung zwischen zwei Punkten, die nicht für jedes Punktepaar AB (A früher als B) erfüllt wäre, wenn sie für ein solches besteht. Anders wird die Sache aber, wenn wir zu drei Zeitpunkten übergehen. Sind irgend zwei Zeitpunkte OE, von denen O der frühere ist, gegeben, so ist es möglich, jeden Zeitpunkt P relativ zu der Einheitsstrecke OE auf begriffliche Weise festzulegen; d. h. es ist möglich, rein logisch aus den Urrelationen eine Beziehung t zwischen drei Punkten zu definieren, für welche folgendes gilt: 1) zu je zwei Punkten A und B, von denen A der frühere ist, gibt es einen und nur einen Punkt C, so daß zwischen A, B und C die Beziehung t statthat, in Zeichen:

$$AC = t \cdot AB;$$

2) es ist

(*) $$OP = t \cdot OE.$$

Und übrigens kann es bei gegebenen Punkten OEP auch nur eine solche Relation geben. Denn wäre t^* eine zweite, so käme die durch

$$t \cdot AB = t^* \cdot AB$$

erklärte Eigenschaft der Zeitstrecke $AB = OE$ und folglich wegen der Homogenität *jeder* Zeitstrecke zu; also drücken dann die Gleichungen

$$AC = t \cdot AB \quad \text{und} \quad AC = t^* \cdot AB$$

beide dieselbe Relation aus. Die *Zahl* ist nichts anderes als ein zusammengedrängtes Symbol für eine derartige Relation t und ihre logische Definition auf Grund der Urbeziehungen. Bei gegebener Einheitsstrecke OE wird durch (*) eine *umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen den Zeitpunkten P und den Zahlen t* hergestellt; wir sprechen von P geradezu als dem »Zeitpunkt t«; genauer heißt t die *Abszisse* von P. Die Logik wird hier zur Arithmetik.

Durch diese prinzipielle Formulierung des Messens, meine ich, wir es begreiflich, wie die Mathematik zu ihrer Rolle in den exakten Natur wissenschaften kommt. *Für das Messen wesentlich ist der Unterschie zwischen dem »Geben« eines Gegenstandes durch individuelle Aufweisun einerseits, auf begrifflichem Wege anderseits.* Das letzte ist immer nu relativ zu Gegenständen möglich, die unmittelbar aufgewiesen werde müssen. Deshalb ist mit dem Messen immer eine *Relativitätstheorie* ve knüpft. Ihr Problem stellt sich allgemein für ein beliebiges Gegenstands gebiet so: 1) Was muß aufgewiesen werden, um relativ dazu auf begrif lichem Wege jeden Gegenstand P des in Frage stehenden Gebietes gebe zu können? Das Aufzuweisende heißt das *Koordinatensystem*, die begrif liche Definition die *Koordinate* (oder Abszisse) von P in jenem Koord natensystem. Zwei verschiedene Koordinatensysteme sind objektiv völl gleichwertig, es gibt keine begrifflich zu erfassende Eigenschaft, welc dem einen zukäme, dem andern nicht; denn dann wäre zu viel unmittelb aufgewiesen. 2) Welcher gesetzmäßige Zusammenhang findet zwischen de Koordinaten eines und desselben willkürlichen Gegenstandes P in zw verschiedenen Koordinatensystemen statt?

Hier im Gebiet der Zeitpunkte beantwortet sich die erste Frage dahi das Koordinatensystem besteht aus einer Zeitstrecke OE (Anfangspun und Maßeinheit); die zweite aber durch die Transformationsformel

$$t = at' + b \qquad (a > 0),$$

in welcher a, b Konstante sind und t, t' die Koordinaten desselben wi kürlichen Punktes P in einem ersten, »ungestrichenen«, und einem zweite »gestrichenen« Koordinatensystem. Dabei können als charakteristisc Zahlen a, b der Transformation für alle möglichen Paare von Koordinate systemen alle möglichen reellen Zahlen auftreten, mit der Beschränkur daß a stets positiv ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bild wie das im Wesen der Sache liegt, eine *Gruppe*; d. h.

1) die »Identität« $t = t'$ ist in ihr enthalten;

2) mit jeder Transformation tritt ihre Inverse in der Gruppe a d. h. diejenige, welche die erstere gerade wieder rückgängig macht. I Inverse der Transformation (a, b):

$$t = at' + b$$

ist $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$:

$$t' = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a};$$

3) mit zwei Transformationen ist in der Gruppe auch immer diejen enthalten, welche durch Hintereinanderausführung jener beiden Tra formationen hervorgeht. In der Tat: durch Hintereinanderausführung beiden Transformationen

$$t = at' + b, \qquad t' = a't'' + b'$$

entsteht

$$t = a^* t'' + b^*,$$

wo

$$a^* = a \cdot a', \qquad b^* = (ab') + b$$

ist; und wenn a und a' positiv sind, ist auch ihr Produkt positiv.

Die in Kap. III und IV behandelte Relativitätstheorie wirft das Relativitätsproblem auf nicht bloß für die Zeitpunkte, sondern für die gesamte physische Welt. Es stellt sich aber heraus, daß es gelöst ist, sobald es einmal für die Formen dieser Welt, Raum und Zeit, seine Lösung gefunden hat: auf Grund eines Koordinatensystems für Raum und Zeit läßt sich auch das physikalisch Reale in der Welt nach allen seinen Bestimmungen begrifflich, durch Zahlen, festlegen. —

Alle Anfänge sind dunkel. Gerade dem Mathematiker, der in seiner ausgebildeten Wissenschaft in strenger und formaler Weise mit seinen Begriffen operiert, tut es not, von Zeit zu Zeit daran erinnert zu werden, daß die Ursprünge in dunklere Tiefen zurückweisen, als er mit seinen Methoden zu erfassen vermag. Jenseits alles Einzelwissens bleibt die Aufgabe, zu *begreifen.* Trotz des entmutigenden Hin- und Herschwankens der Philosophie von System zu System können wir nicht darauf verzichten, wenn sich nicht Erkenntnis in ein sinnloses Chaos verwandeln soll.

Kapitel I.

Der Euklidische Raum: seine mathematische Formalisierung und seine Rolle in der Physik.

§ 1. Herleitung der elementaren Raumbegriffe aus dem der Gleichheit.

Wie wir in der Zeit ein streng punktuelles *Jetzt* gesetzt haben, so
setzen wir in der kontinuierlichen räumlichen Ausbreitung, die ebenfalls
unendlicher Teilung fähig ist, als letztes einfaches Element ein exakte
Hier, den Raumpunkt. Der Raum ist nicht wie die Zeit ein eindimen-
sionales Kontinuum, die Art seines kontinuierlichen Ausgebreitetseins läß
sich nicht auf das einfache Verhältnis von früher und später zurückführen
wir lassen dahingestellt, in was für Relationen diese Kontinuität begrif
lich zu erfassen ist. Hingegen ist der Raum wie die Zeit *Form* d
Erscheinungen, und damit ist die Idee der Gleichheit gegeben: identis
derselbe Gehalt, genau dasselbe Ding, welches bleibt, was es ist, kann
gut an irgend einer andern Raumstelle sein als an der, an welcher
sich wirklich befindet; das von ihm dann eingenommene Raumstück
ist demjenigen 𝔖 gleich oder *kongruent*, welches es wirklich einnimm
Jedem Punkt P von 𝔖 entspricht ein bestimmter *homologer* Punkt P' in
der nach jener Ortsversetzung von demselben Teile des gegebenen Geh
bedeckt sein würde, der in Wirklichkeit P bedeckt. Diese »Abbildun
vermöge deren dem Punkte P der Punkt P' entspricht, nenne ich e
kongruente Abbildung. Bei Erfüllung geeigneter subjektiver Bedingun
würde uns jenes Materiale nach seiner Ortsversetzung genau so erschei
wie das tatsächlich gegebene. Es ist der Glaube vernünftig zu re
fertigen, daß ein als starr erprobter Körper — d. i. ein solcher, der,
wir ihn auch bewegen und bearbeiten mögen, uns immer wieder gena
erscheint wie er vorher war, wenn wir uns selber zu ihm in die rich
Situation bringen — in zwei Lagen, die wir ihm erteilen, diese
gleicher Raumstücke realisiert. Den Begriff der Gleichheit will ich n
dem schwer zu analysierenden des kontinuierlichen Zusammenhangs
Aufbau der Geometrie zugrunde legen und in einer flüchtig hingewor
Skizze zeigen, wie auf diese alle geometrischen Grundbegriffe zurückge
werden können. Dabei schwebt mir als eigentliches Ziel vor, unter
kongruenten Abbildungen die *Translationen* herauszuheben; erst von d
Begriff aus soll dann eine strenger geführte axiomatische Begründun
Euklidischen Geometrie anheben.

Zunächst die *gerade Linie*! Ihre Eigentümlichkeit ist, daß sie durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist; jede andere Linie kann noch unter Festhaltung zweier ihrer Punkte durch kongruente Abbildung in eine andere Lage gebracht werden (Linealprobe). Also: sind A, B zwei verschiedene Punkte, so gehört zu der geraden Linie $g = AB$ jeder Punkt, der bei allen kongruenten Abbildungen in sich übergeht, die A und B in sich überführen (die gerade Linie »weicht nach keiner Seite aus«). Kinematisch ausgedrückt, kommt das darauf hinaus, daß wir die gerade Linie als Rotationsachse auffassen. Sie ist homogen und ein Linearkontinuum wie die Zeit: sie zerfällt durch einen beliebigen ihrer Punkte A in zwei Teile, zwei »Halbgeraden«. Gehören B und C je einem dieser beiden Teile an, so sagt man, A liege zwischen B und C; die Punkte des einen Teils liegen rechts, die des andern links von A (dabei wird willkürlich bestimmt, welche Hälfte die linke und welche die rechte heißen soll). Die einfachsten Grundtatsachen, welche für diesen Begriff des »*zwischen*« gelten, lassen sich in solcher Vollständigkeit, wie es für den deduktiven Aufbau der Geometrie nötig ist, exakt formulieren. Daher sucht man in der Geometrie (unter Verkehrung des wahren anschaulichen Verhältnisses) auf den Begriff des »zwischen«, auf die Relation »A gehört der Geraden BC an und liegt zwischen B und C«, alle Kontinuitätsbegriffe zurückzuführen. Sei A' ein Punkt rechts von A. Durch A' zerfällt die Gerade g gleichfalls in zwei Stücke; wir nennen dasjenige, dem A angehört, das linke. Liegt hingegen A' links von A, so dreht sich die Sache um. Bei dieser Festsetzung gelten dann analoge Verhältnisse nicht nur hinsichtlich A und A', sondern irgend zweier Punkte der geraden Linie. Durch das links und rechts sind die Punkte der Geraden genau in der gleichen Weise geordnet wie die Zeitpunkte durch das früher und später.

Links und rechts sind gleichberechtigt. Es gibt eine kongruente Abbildung, die A fest läßt, jedoch die beiden Hälften, in welche die Gerade durch A zerfällt, vertauscht; jede Strecke AB läßt sich verkehrt mit sich zur Deckung bringen (so daß B auf A und A auf B fällt). Hingegen läßt eine kongruente Abbildung, die A in A überführt und alle Punkte rechts von A in Punkte rechts von A, alle Punkte links von A in Punkte links von A, jeden Punkt der Geraden fest. Die Homogeneïtät der geraden Linie kommt darin zum Ausdruck, daß man die Gerade so mit sich zur Deckung bringen kann, daß irgend einer ihrer Punkte A in irgend einen andern A' übergeht, die rechte Hälfte von A aus in die rechte Hälfte von A' aus und ebenso die linke in die linke (Translation der Geraden). Führen wir für die Punkte der Geraden die Gleichheit $AB = A'B'$ durch die Erklärung ein: sie besagt, daß AB durch eine Translation der Geraden in $A'B'$ übergeht, so finden hinsichtlich dieses Begriffs die gleichen Umstände statt, wie sie für die Zeit galten. Sie ermöglichen die Einführung der Zahl, die Herstellung einer umkehrbar-eindeutigen Korrespondenz zwischen den Punkten auf der geraden Linie und den reellen Zahlen unter Zugrundelegung einer Einheitsstrecke OE.

Betrachten wir die Gruppe der kongruenten Abbildungen, welche Gerade g fest lassen (d. h. jeden Punkt von g in einen Punkt vo überführen)! Unter ihnen haben wir die Rotationen als diejenigen h vorgehoben, welche nicht nur g als Ganzes, sondern jeden Punkt vo einzeln an seiner Stelle lassen. Wie können wir in dieser Gruppe Translationen von den Schraubungen unterscheiden? Ich will hier ei ersten Weg einschlagen, der auf einer rotativen Auffassung nicht der Geraden, sondern auch der Ebene beruht.

Zwei von einem Punkt O ausgehende Halbgerade bilden einen *Win* Jeder Winkel kann verkehrt mit sich zur Deckung gebracht werden, daß der eine Schenkel auf den andern fällt und umgekehrt. Ein *rec* Winkel ist mit seinem Nebenwinkel kongruent. Ist also h eine Ger die in A auf g senkrecht steht, so gibt es eine Rotation um g (U klappung), welche die beiden Hälften, in die h durch A zerfällt, tauscht. Alle auf g in A senkrecht stehenden Geraden bilden die *Ebe* durch A senkrecht zu g. Je zwei dieser senkrechten Geraden ge auseinander durch Rotation um g hervor. Bringt man g irgendwie sich verkehrt zur Deckung, so da in A übergeht, die beiden Häl in die g durch A zerfällt, miteinander vertauscht werden kommt dabei die Ebene E not dig mit sich selbst zur Deck Auch durch diese Eigenschaft sammen mit der Rotationssymm läßt sich die Ebene erklären: kongruente rotationssymmetri Tische sind eben, wenn ich dad

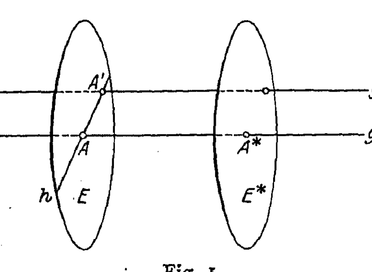


Fig. 1.

daß ich den einen mit vertikaler Achse verkehrt auf den andern st die beiden Tischplatten zur Deckung bringe. Die Ebene ist hom Der Punkt A auf E, der hier zunächst als »Zentrum« erscheint, i keiner Weise vor ihren übrigen Punkten ausgezeichnet; durch jeden ihnen, A', geht eine gerade Linie g' hindurch von der Art, daß E allen Geraden durch A' senkrecht zu g' besteht. Die aus den sämtl Punkten A' von E in dieser Weise hervorgehenden senkrechten Gerad bilden eine Schar *paralleler* Geraden; in ihr ist die Gerade g, vo wir ausgingen, in keiner Weise ausgezeichnet. Die Geraden der erfüllen den ganzen Raum, so daß durch jeden Raumpunkt eine un eine Gerade der Schar hindurchgeht. Sie ist unabhängig davo welcher Stelle A der Geraden g die obige Konstruktion ausgeführt ist A^* irgend ein Punkt von g, so schneidet die auf g in A^* erri Normalebene nicht nur g, sondern alle Geraden der Parallelenschar recht. Diese aus den sämtlichen Punkten A^* von g entstehenden No ebenen E* bilden eine parallele Schar von Ebenen; auch sie er den Raum einfach und lückenlos. Es bedarf nur noch eines k

Schrittes, um von dem so gewonnenen Raumgerüst zum rechtwinkligen Koordinatensystem zu gelangen. Hier benutzen wir es jedoch, um den Begriff der räumlichen Translation festzulegen: die Translation ist eine kongruente Abbildung, die nicht nur g, sondern jede Gerade der Parallelenschar in sich überführt. Es gibt eine und nur eine Translation, welche den beliebigen Punkt A von g in den beliebigen Punkt A^* derselben Geraden überführt.

Ich will noch einen zweiten Weg angeben, um zum Begriff der Translation zu gelangen. Das Hauptkennzeichen der Translation ist, daß in ihr alle Punkte gleichberechtigt sind, daß von dem Verhalten eines Punktes bei der Translation nichts Objektives ausgesagt werden kann, was nicht auch für jeden andern gelte (so daß auch bei gegebener Translation die Punkte des Raumes nur durch individuelles Aufweisen [»dieser da«] voneinander unterschieden werden können, während z. B. in einer Rotation sich die Punkte der Achse durch die Eigenschaft, daß sie an ihrer Stelle bleiben, vor allen übrigen auszeichnen). Indem wir dieses Kennzeichen in den Vordergrund stellen, ergibt sich die folgende Erklärung der Translation, die von dem Begriff der Rotation ganz unabhängig ist. Bei einer kongruenten Abbildung gehe der beliebige Punkt P in P' über; wir wollen PP' ein Paar zusammengehöriger Punkte nennen. Hat eine zweite kongruente Abbildung die Eigenschaft, daß sie jedes Paar zusammengehöriger Punkte wiederum in ein solches Paar überführt, so soll sie mit der ersten vertauschbar genannt werden. Eine kongruente Abbildung heißt eine Translation, wenn es mit ihr vertauschbare kongruente Abbildungen gibt, welche den beliebigen Punkt A in den beliebigen Punkt B überführen. — Daß zwei kongruente Abbildungen I, II miteinander vertauschbar sind, besagt, wie man sofort auf Grund der Erklärung beweist, daß die durch Hintereinanderausführung der Abbildungen I, II entstehende kongruente Abbildung mit derjenigen identisch ist, die durch Hintereinanderausführung dieser beiden Abbildungen II, I in umgekehrter Reihenfolge hervorgeht. Es gibt keine Translation, die den Punkt A in A überführt, außer der Identität, die jeden Punkt festläßt. Denn wenn eine solche Translation P in P' überführt, so muß es nach Definition eine kongruente Abbildung geben, die A in P und gleichzeitig A in P' verwandelt; mithin muß P' mit P identisch sein. Es ist eine Tatsache, daß eine Translation (und zwar nach dem Gesagten nur eine) existiert, welche den beliebigen Punkt A in den beliebigen B überführt. Es ist eine Tatsache, daß, wenn $\mathfrak{T}$ eine Translation ist, A und B irgend zwei Punkte, nicht bloß (laut Definition) überhaupt eine mit $\mathfrak{T}$ vertauschbare kongruente Abbildung existiert, die A in B überführt, sondern daß insbesondere diejenige *Translation*, welche A nach B bringt, die geforderte Eigenschaft besitzt. Eine Translation ist daher mit allen Translationen vertauschbar; und eine kongruente Abbildung, die mit allen Translationen vertauschbar ist, notwendig selber eine Translation. Daraus folgt noch, daß diejenige kongruente Abbildung, die durch Hintereinanderausführung

zweier Translationen entsteht, und ebenso die »Inverse« einer Transla (d. i. diejenige Abbildung, welche die Translation gerade wieder rü gängig macht) eine Translation ist: die Translationen bilden eine »*Gruppe*

Ist so der Begriff der Translation unabhängig von dem der Rota begründet, so läßt sich der obigen rotativen Auffassung von Gerade Ebene eine translative gegenüberstellen. Sei $\mathfrak{a}$ eine Translation, die Punkt A_0 in A_1 überführt. Diese selbe Translation wird A_1 in ei Punkt A_2, A_2 in A_3 überführen usf.; durch sie wird A_0 aus einem wissen Punkt A_{-1} hervorgehen, A_{-1} aus A_{-2} usf. Damit erhalten zwar noch nicht die Gerade, aber eine Folge äquidistanter Punkte ihr. Nun existiert jedoch, wenn n eine natürliche Zahl ist, eine Tr lation $\frac{\mathfrak{a}}{n}$, die bei n-maliger Wiederholung $\mathfrak{a}$ ergibt. Verwenden vom Punkte A_0 unsern Ausgang nehmend, $\frac{\mathfrak{a}}{n}$ in der gleichen Weise eben $\mathfrak{a}$, so erhalten wir eine n-mal so dichte Punkterfüllung der zu k struierenden Geraden. Nehmen wir hier für n alle möglichen gan Zahlen, so wird diese Erfüllung, je größer n wird, um so dichter den, und alle Punkte, die wir erhalten, verfließen zu einem Lin kontinuum, in das sie sich unter Aufgabe ihrer selbständigen Exis einbetten (ich appelliere hier an die Anschauung der Kontinuität). gerade Linie, können wir sagen, entsteht aus einem Punkte durch im wiederholte Ausführung derselben infinitesimalen Translation und i Inversen. Eine Ebene aber entsteht durch Translation einer Gerade an einer andern h: sind g, h zwei verschiedene, durch den Punk gehende Gerade, so übe man auf g alle Translationen aus, welche sich überführen; die sämtlichen so aus g entstehenden Geraden bi die Verbindungsebene von g und h.

Es kommt erst Ordnung in den logischen Aufbau der Geome wenn man den allgemeinen Begriff der kongruenten Abbildung zun zu dem der Translation verengert und diesen als Grundstein des matischen Fundaments verwendet (§§ 2, 3). Doch kommen wir dad nur zu einer rein translativen, der »*affinen*« *Geometrie*, in deren Rah hernach der allgemeine Begriff der Kongruenz wieder eingeführt we muß (§ 4). Nachdem die Anschauung uns die nötigen Unterlagen liefert hat, treten wir mit dem nächsten Paragraphen in die Domäne deduktiven Mathematik hinüber.

§ 2. Grundlagen der affinen Geometrie.

Eine Translation oder Verschiebung $\mathfrak{a}$ des Raumes wollen wir bi weiteres als einen *Vektor* bezeichnen; später freilich werden wir mit di Namen eine allgemeinere Vorstellung verbinden. Daß bei der schiebung $\mathfrak{a}$ der Punkt P in Q übergeht, werde auch so ausgedrück ist der Endpunkt des von P aus aufgetragenen Vektors $\mathfrak{a}$. Sind P u irgend zwei Punkte, so gibt es eine und nur eine Verschiebung $\mathfrak{a}$

P in Q überführt; wir nennen sie den durch P und Q bestimmten Vektor und bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{PQ}$.

Diejenige Translation $\mathfrak{c}$, die durch Hintereinanderausführung zweier Translationen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsteht, werde als die Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet: $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Aus der Definition der Summe ergibt sich 1) die Bedeutung der Multiplikation (Wiederholung) und der Teilung eines Vektors durch eine ganze Zahl; 2) der Sinn der Operation —, welche den Vektor $\mathfrak{a}$ in den inversen $-\mathfrak{a}$ verkehrt; 3) was unter dem Vektor 0 zu verstehen ist, nämlich die alle Punkte festlassende »Identität«. Es ist $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = 0$. Weiter folgt daraus die Bedeutung des Symbols $\pm \frac{m\mathfrak{a}}{n} = \lambda\mathfrak{a}$, in welchem m und n irgend zwei natürliche Zahlen sind und λ den Bruch $\pm \frac{m}{n}$ bezeichnet. Durch die Forderung der Stetigkeit ist damit auch festgelegt, was unter dem Vektor $\lambda\mathfrak{a}$ zu verstehen ist, wenn λ eine beliebige reelle Zahl. Wir stellen folgendes einfache Axiomensystem der affinen Geometrie auf.

I. Vektoren.

Je zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *als ihre »Summe«; eine Zahl* λ *und ein Vektor* $\mathfrak{a}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\lambda\mathfrak{a}$, *das »λ-fache von* $\mathfrak{a}$« (*Multiplikation*). *Diese Operationen genügen folgenden Gesetzen.*

α) *Addition.*

1. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ (*kommutatives Gesetz*).

2. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ (*assoziatives Gesetz*).

3. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *irgend zwei Vektoren, so gibt es einen und nur einen* $\mathfrak{x}$, *für welchen die Gleichung* $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ *gilt. Er heißt die Differenz* $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{a}$. (*Möglichkeit der Subtraktion.*)

β) *Multiplikation.*

1. $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = (\lambda\mathfrak{a}) + (\mu\mathfrak{a})$ (*erstes distributives Gesetz*).

2. $\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\mathfrak{a}$ (*assoziatives Gesetz*).

3. $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

4. $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a}) + (\lambda\mathfrak{b})$ (*zweites distributives Gesetz*).

1. und 2. folgen für rationale Multiplikatoren λ, μ aus den Additionsaxiomen; gemäß dem Prinzip der Stetigkeit nehmen wir sie auch für beliebige reelle Zahlen in Anspruch, formulieren sie aber ausdrücklich als Axiome, da sie sich in dieser Allgemeinheit rein logisch nicht aus den Additionsaxiomen herleiten lassen: sie setzen uns in den Stand, aus dem logischen Aufbau der Geometrie die schwer zu greifende Stetigkeit ganz zu verbannen. 4. faßt die Ähnlichkeitssätze zusammen.

γ) Das »*Dimensionsaxiom*«, das hier seine Stelle im System findet, werden wir erst hernach formulieren.

II. Punkte und Vektoren.

1. *Je zwei Punkte A und B bestimmen einen Vektor* $\mathfrak{a}$; *in Zeiche* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$. *Ist A irgend ein Punkt,* $\mathfrak{a}$ *irgend ein Vektor, so gibt es eine und nur einen Punkt B, für welchen* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$ *ist.*

2. *Ist* $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathfrak{b}$, *so ist* $\overrightarrow{AC} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

In diesen Axiomen treten zwei Grundkategorien von Gegenständen au die Punkte und die Vektoren; drei Grundbeziehungen, nämlich diejeniger welche durch die Symbole

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}, \qquad \overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$$

ausgedrückt werden. Alle Begriffe, die sich allein mit ihrer Hülfe rei logisch definieren lassen, gehören zur affinen Geometrie; alle Sätze, welch sich aus diesen Axiomen rein logisch folgern lassen, bilden das Lehı gebäude der affinen Geometrie, das somit auf der hier gelegten axic matischen Basis deduktiv errichtet werden kann. Übrigens sind unsei Axiome nicht alle logisch unabhängig voneinander, sondern die Addition axiome für Vektoren ($I\alpha$, 2. und 3.) folgen aus denen, (II), welche di Beziehung zwischen Punkten und Vektoren regeln. Es lag uns aber daraı daß die Axiome I über Vektoren für sich schon ausreichen, um alle Ta sachen, welche nur die Vektoren (und nicht die Beziehungen zwische Punkten und Vektoren) betreffen, aus ihnen zu folgern.

Aus den Additionsaxiomen $I\alpha$ läßt sich schließen, daß ein bestimmt Vektor $\mathfrak{o}$ existiert, der für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} =$ erfüllt; aus den Axiomen II ergibt sich weiter, daß $\overrightarrow{AB}$ dann und n dann dieser Vektor $\mathfrak{o}$ ist, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Ist O ein Punkt, $\mathfrak{e}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedener Vektor, so bilden die En punkte P aller Vektoren $\overrightarrow{OP}$ von der Form $\xi\mathfrak{e}$ (ξ eine beliebige reel Zahl) eine *Gerade.* Durch diese Erklärung wird die translative Auffassu der Geraden in eine exakte, nur die Grundbegriffe des affinen Axiome systems benutzende Definition gekleidet. Diejenigen Punkte P, für welc die Abszisse ξ positiv ist, bilden die eine Hälfte, diejenigen, für welc ξ negativ ist, die andere Hälfte der Geraden von O aus. Schreiben v $\mathfrak{e}_1$ statt $\mathfrak{e}$ und ist $\mathfrak{e}_2$ ein weiterer Vektor, der nicht von der Form $\xi\mathfrak{e}_1$ i so bilden die Endpunkte P aller Vektoren $\overrightarrow{OP}$ von der Form $\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2$ eine *Ebene* (translative Entstehung der Ebene durch Verschiebung ei Geraden längs einer andern). Verschieben wir endlich die Ebene E lä einer durch O hindurchgehenden, aber nicht in E gelegenen Geraden, durchstreicht sie den ganzen Raum. Ist mithin $\mathfrak{e}_3$ ein Vektor, der ni unter der Form $\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2$ enthalten ist, so kann jeder Vektor auf e und nur eine Weise als eine lineare Kombination

$$\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2 + \xi_3\mathfrak{e}_3$$

von $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ dargestellt werden. Es ergeben sich hier naturge folgende Begriffsbestimmungen.

Eine endliche Anzahl von Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ heißt *linear unabhängig*, wenn

$$(2) \qquad \xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi_h\mathfrak{e}_h$$

nur dann $= 0$ ist, falls sämtliche Koeffizienten ξ verschwinden. Unter dieser Voraussetzung bilden, wie wir uns ausdrücken wollen, die sämtlichen Vektoren von der Form (2) eine *h-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit*, und zwar diejenige, welche von den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ »*aufgespannt*« wird. Eine h-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ kann, unabhängig von der besonderen »Basis« $\mathfrak{e}_i$, folgendermaßen gekennzeichnet werden:

1. Die beiden Grundoperationen: Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl führen nicht aus der Mannigfaltigkeit heraus; d. h. die Summe zweier zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Vektoren wie auch das Produkt eines zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Vektors mit einer beliebigen reellen Zahl liegt stets wieder in $\mathfrak{M}$.

2. Es existieren in $\mathfrak{M}$ wohl h linear unabhängige Vektoren, aber je $h + 1$ sind voneinander linear abhängig.

Aus der 2. Eigenschaft (die aus unserer ursprünglichen Definition mit Hülfe der elementarsten Sätze über lineare Gleichungen folgt) entnehmen wir, daß die Dimensionszahl h für die Mannigfaltigkeit als solche charakteristisch ist und nicht abhängig von der speziellen Vektorbasis, durch welche wir sie »aufspannen«.

Das in der obigen Tabelle der Axiome noch ausgelassene *Dimensionsaxiom* kann jetzt so formuliert werden:

Es gibt n linear unabhängige Vektoren, aber je $n + 1$ sind voneinander linear abhängig,

oder: die Vektoren bilden eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Das führt für $n = 3$ auf die affine räumliche Geometrie, für $n = 2$ auf die ebene, für $n = 1$ auf die Geometrie der Geraden. Bei der deduktiven Behandlung der Geometrie wird es aber zweckmäßig sein, den Wert von n unbestimmt zu lassen und so eine »n-dimensionale Geometrie« zu entwickeln, in welcher die der Geraden, der Ebene und des Raumes als die speziellen Fälle $n = 1, 2, 3$ enthalten sind. Denn wir sehen (hier für die affine, hernach für die vollständige Geometrie), daß in der mathematischen Struktur des Raumes nichts liegt, was uns nötigt, bei der Dimensionszahl 3 stehen zu bleiben. Gegenüber der in unsern Axiomen ausgedrückten mathematischen Gesetzmäßigkeit des Raumes erscheint seine spezielle Dimensionszahl 3 als eine Zufälligkeit, über die wir in einer systematischen deduktiven Theorie hinwegschreiten müssen. Auf die damit gewonnene Idee einer n-dimensionalen Geometrie kommen wir noch im nächsten Paragraphen zurück [4]). Zunächst müssen wir die begonnenen Erklärungen vervollständigen.

Ist O ein beliebiger Punkt, so erfüllen die sämtlichen Endpunkte P der von O aus aufgetragenen Vektoren einer h-dimensionalen linearen

Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, wie sie durch (2) dargestellt ist, ein *h-dimensionales lineares Punktgebilde*; wir sagen, es werde vom Punkte O aus durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ aufgespannt. (Das 1dimensionale Gebilde heißt Gerade, das 2dimensionale Ebene.) Der Punkt O spielt auf dem linearen Gebilde keine ausgezeichnete Rolle; ist O' irgend ein Punkt desselben, so durchläuft $\overrightarrow{O'P}$, wenn für P alle möglichen Punkte des linearen Gebildes eintreten, die gleiche Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Tragen wir die sämtlichen Vektoren der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ einmal von einem Punkte O, ein andermal von einem beliebigen andern Punkte O' auf, so nennen wir die beiden entstehenden linearen Punktgebilde zueinander *parallel*. Darin liegt insbesondere die Definition paralleler Geraden und paralleler Ebenen. Derjenige Teil des durch Abtragen aller Vektoren (2) von O aus entstandenen h-dimensionalen linearen Gebildes, den wir erhalten, wenn wir die ξ der Beschränkung

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \qquad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \qquad \cdots, \qquad 0 \leqq \xi_h \leqq 1$$

unterwerfen, werde das von O aus durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}$ aufgespannte h-dimensionale *Parallelepiped* genannt. (Das 1dimensional Parallelepiped heißt Strecke, ein 2dimensionales Parallelogramm. — All diese Begriffe tragen die Beschränkung auf den uns anschaulich gegebene Fall $n = 3$ nicht in sich.)

Einen Punkt O zusammen mit n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}$ $\cdots, \mathfrak{e}_n$ nennen wir ein Koordinatensystem ($\mathfrak{C}$). Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ kan auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\mathfrak{x} = \xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi_n \mathfrak{e}_n \tag{3}$$

dargestellt werden; die Zahlen ξ_i nennen wir seine *Komponenten* in de Koordinatensystem ($\mathfrak{C}$). Ist P ein beliebiger Punkt und $\overrightarrow{OP}$ gleich de Vektor (3), so heißen die ξ_i außerdem die *Koordinaten* von P. A Koordinatensysteme sind in der affinen Geometrie gleichberechtigt: gibt keine affingeometrische Eigenschaft, durch welche sich das eine v dem andern unterschiede. Ist

$$O'; \ \mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \cdots, \mathfrak{e}'_n$$

ein zweites Koordinatensystem, so werden Gleichungen gelten

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \mathfrak{e}_k, \tag{4}$$

in denen die α_{ki} ein Zahlsystem bilden, das wegen der linearen 1 abhängigkeit der $\mathfrak{e}'_i$ eine von 0 verschiedene Determinante besitzen m Sind ξ_i die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im ersten, ξ'_i im zweiten] ordinatensystem, so besteht der Zusammenhang

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi'_k, \tag{5}$$

wie man findet, indem man die Ausdrücke (4) in die Gleichung

$$\sum_i \xi_i \mathfrak{e}_i = \sum_i \xi'_i \mathfrak{e}'_i$$

einsetzt. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ seien die Koordinaten von O' im ersten Koordinatensystem. Sind x_i die Koordinaten eines beliebigen Punktes im ersten, x'_i im zweiten Koordinatensystem, so gelten die Gleichungen

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k + \alpha_i. \tag{6}$$

Denn $x_i - \alpha_i$ sind die Komponenten von

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$$

im ersten, x'_i im zweiten Koordinatensystem. Die Transformationsformeln (6) für die Koordinaten sind also linear; diejenigen (5) für die Vektorkomponenten entstehen aus ihnen einfach dadurch, daß die von den Variablen freien konstanten Glieder α_i gestrichen werden. — Es ist eine analytische Behandlung der affinen Geometrie möglich, bei der jeder Vektor durch seine Komponenten, jeder Punkt durch seine Koordinaten repräsentiert wird. Die geometrischen Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren drücken sich dann aus als solche zwischen ihren Komponenten bzw. Koordinaten bestehende Zusammenhänge, die durch beliebige lineare Transformation nicht zerstört werden.

Die Formeln (5), (6) lassen noch eine andere Deutung zu: sie können als die Darstellung einer *affinen Abbildung* in einem bestimmten Koordinatensystem aufgefaßt werden. Eine Abbildung, d. i. ein Gesetz, das jedem Vektor $\mathfrak{x}$ einen »Bild«-Vektor $\mathfrak{x}'$, jedem Punkt P einen »Bild«-Punkt P' zuordnet, heißt linear oder affin, wenn durch die Abbildung die affinen Grundbeziehungen (1) nicht zerstört werden — wenn also das Bestehen von (1) die gleichen Relationen für die Bild-Vektoren und Punkte zur Folge hat:

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = \mathfrak{c}', \qquad \mathfrak{b}' = \lambda \mathfrak{a}', \qquad \overrightarrow{A'B'} = \mathfrak{a}' \text{ —}$$

und wenn außerdem das Bild keines von o verschiedenen Vektors = o ist, oder anders ausgedrückt: wenn aus zwei Punkten nur dann der gleiche Bildpunkt hervorgeht, falls sie selber identisch sind. Zwei Figuren, die durch affine Abbildung auseinander hervorgehen, sind affin. Sie sind vom Standpunkt der affinen Geometrie einander völlig gleich; es kann keine affine Eigenschaft geben, welche der einen zukäme, der andern aber nicht. Der Begriff der linearen Abbildung spielt also für die affine Geometrie die gleiche Rolle wie die Kongruenz in der vollständigen Geometrie; daraus geht seine prinzipielle Bedeutung hervor. Linear unabhängige Vektoren gehen durch affine Abbildung wieder in linear unabhängige über; ein h-dimensionales lineares Gebilde in ein ebensolches Gebilde; parallele in parallele; ein Koordinatensystem $O \mid \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ in ein neues Koordinatensystem $O' \mid \mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \cdots, \mathfrak{e}'_n$. Die Zahlen α_{ki}, α_i mögen die gleiche

Bedeutung haben wie oben. Der Vektor (3) verwandelt sich durch die affine Abbildung in

$$\mathfrak{x}' = \xi_1 \mathfrak{e}'_1 + \xi_2 \mathfrak{e}'_2 + \cdots + \xi_n \mathfrak{e}'_n.$$

Setzen wir die Ausdrücke von $\mathfrak{e}'_i$ ein, benutzen zur Darstellung der affinen Abbildung das ursprüngliche Koordinatensystem $O|\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ und verstehen unter ξ_i die Komponenten irgend eines Vektors, unter ξ'_i die seines Bildvektors, so ist also

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k. \tag{5'}$$

Geht P über in P', so der Vektor $\overrightarrow{OP}$ in $\overrightarrow{O'P'}$; daraus folgt: sind x_i die Koordinaten von P, x'_i die von P', so gilt

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k + \alpha_i.$$

In der analytischen Geometrie pflegt man die linearen Gebilde durch lineare Gleichungen für die Koordinaten des »laufenden Punktes« zu charakterisieren. Darauf werden wir im nächsten Paragraphen genauer eingehen; hier finde nur noch der Grundbegriff »lineare Form«, auf dem diese Darstellung beruht, seinen Platz. Eine Funktion $L(\mathfrak{x})$ — deren Argument $\mathfrak{x}$ alle Vektoren durchläuft, deren Werte aber reelle Zahlen sind — heißt eine *Linearform*, wenn sie die Funktionaleigenschaften besitzt:

$$L(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = L(\mathfrak{a}) + L(\mathfrak{b}); \qquad L(\lambda \mathfrak{a}) = \lambda \cdot L(\mathfrak{a}).$$

In einem Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ ist jede der n Vektorkomponenten ξ_i von $\mathfrak{x}$ eine solche Linearform. Für eine beliebige Linearform L gilt, wenn $\mathfrak{x}$ durch (3) definiert ist,

$$L(\mathfrak{x}) = \xi_1 L(\mathfrak{e}_1) + \xi_2 L(\mathfrak{e}_2) + \cdots + \xi_n L(\mathfrak{e}_n);$$

setzen wir also $L(\mathfrak{e}_i) = a_i$, so erscheint die Linearform, in Komponenten dargestellt, unter der Gestalt

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n;$$

die a_i sind ihre konstanten Koeffizienten. Umgekehrt wird durch jeden Ausdruck dieser Art eine Linearform gegeben. Mehrere Linearformen $L_1, L_2, \cdots, L_h$ sind linear unabhängig, wenn keine Konstanten λ_i existieren, für welche identisch in $\mathfrak{x}$ die Gleichung

$$\lambda_1 L_1(\mathfrak{x}) + \lambda_2 L_2(\mathfrak{x}) + \cdots + \lambda_h L_h(\mathfrak{x}) = 0$$

besteht, außer $\lambda_i = 0$. $n + 1$ Linearformen sind stets linear abhängig voneinander.

§ 3. Idee der *n*-dimensionalen Geometrie. Lineare Algebra. Quadratische Formen.

Um die Raumgesetze in ihrer vollen mathematischen Harmonie zu erfassen, müssen wir von der besonderen Dimensionszahl $n = 3$ abstrahieren. Es hat sich nicht nur in der Geometrie, sondern in noch

staunlicherem Maße in der Physik immer wieder gezeigt, daß, sobald wir die Naturgesetze, von denen die Wirklichkeit beherrscht ist, erst einmal völlig durchdringen, diese sich in mathematischen Beziehungen von der durchsichtigsten Einfachheit und vollendetsten Harmonie darstellen. Den Sinn für diese Einfachheit und Harmonie, den wir heute in der theoretischen Physik nicht missen können, zu entwickeln, scheint mir eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichts zu sein; sie ist für uns eine Quelle hoher Erkenntnisbefriedigung. Die analytische Geometrie, in so gedrängter und prinzipieller Form vorgetragen, wie ich es hier versuche, gibt einen ersten, aber noch unzulänglichen Begriff davon. Doch nicht nur um solcher Zwecke willen müssen wir uns über die Dimensionszahl $n = 3$ erheben, sondern wir benötigen für spätere konkrete physikalische Probleme, wie sie die Relativitätstheorie mit sich bringt, in der die Zeit zum Raum hinzutritt, die vierdimensionale Geometrie.

Man braucht keineswegs die Geheimlehren der Spiritisten zu Rate zu ziehen, um sich den Gedanken einer mehrdimensionalen Geometrie anschaulich näher zu bringen. Betrachten wir z. B. homogene Gasgemische aus Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure. Ein beliebiges Quantum eines solchen Gemisches ist charakterisiert durch die Angabe, wieviel Gramm jedes Gases in ihm enthalten sind. Nennen wir jedes solche Quantum einen Vektor (Namen können wir geben, wie wir wollen) und verstehen unter Addition die Vereinigung zweier Gasquanten im gewöhnlichen Sinne, so sind die sämtlichen auf Vektoren bezüglichen Axiome *I* unseres Systems mit der Dimensionenzahl $n = 4$ erfüllt, wenn wir uns erlauben, auch von negativen Gasquanten zu reden. 1 gr reinen Wasserstoffs, 1 gr Sauerstoff, 1 gr Stickstoff und 1 gr Kohlensäure sind vier voneinander unabhängige »Vektoren«, aus denen sich alle andern linear zusammensetzen lassen, bilden also ein Koordinatensystem. — Oder ein anderes Beispiel: Auf jeder von 5 parallelen Stangen ist eine kleine Kugel verschiebbar. Ein bestimmter Zustand dieser primitiven »Rechenmaschine« ist gegeben, wenn die Stelle, an der sich jede der 5 Kugeln auf ihrer Stange befindet, bekannt ist. Nennen wir jeden solchen Zustand einen »Punkt« und jede simultane Verschiebung der 5 Kugeln einen »Vektor«, so sind unsere sämtlichen Axiome erfüllt mit der Dimensionszahl $n = 5$. — Man sieht schon hieraus: es lassen sich anschauliche Gebilde mancherlei Art konstruieren, die bei geeigneter Namengebung unseren Axiomen genügen.

Viel wichtiger aber als diese etwas spielerischen Exempel ist das folgende, welches zeigt, daß *unsere Axiome die Operationsbasis für die Theorie der linearen Gleichungen charakterisieren.* Sind α_i und α gegebene Zahlen, so nennt man bekanntlich

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \tag{7}$$

eine *homogene*,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha \tag{8}$$

eine *inhomogene* lineare Gleichung für die Unbekannten x_i. Zur Behanc lung der *Theorie der linearen homogenen Gleichungen* ist es gut, für ei Wertsystem der Variablen x_i einen kurzen Namen zu haben; wir bezeichne es als »Vektor«. Mit diesen Vektoren soll so gerechnet werden, daß unt der Summe der beiden Vektoren

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ und } (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

der Vektor

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

verstanden wird und unter dem λ-fachen des ersten der Vektor

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

Dann sind die Axiome I über Vektoren erfüllt mit der Dimensionszahl

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

bilden ein System unabhängiger Vektoren; die Komponenten eines b liebigen Vektors $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ in diesem Koordinatensystem sind c Zahlen x_i selber. Der Hauptsatz über die Lösung linearer homogen Gleichungen läßt sich jetzt so aussprechen: Sind $L_1(\mathfrak{x}), L_2(\mathfrak{x}), \cdots, L_h$ h linear unabhängige Linearformen, so bilden die Lösungen $\mathfrak{x}$ der Gl chungen

$$L_1(\mathfrak{x}) = 0, \; L_2(\mathfrak{x}) = 0, \; \cdots, \; L_h(\mathfrak{x}) = 0$$

eine $(n - h)$-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit.

In der *Theorie der inhomogenen linearen Gleichungen* wollen wir Wertsystem der Variablen x_i lieber als einen »Punkt« bezeichnen. Si x_i und x'_i zwei Lösungssysteme der Gleichung (8), so ist ihre Differ

$$x'_1 - x_1, \; x'_2 - x_2, \; \cdots, \; x'_n - x_n$$

eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (7). Wir wol deshalb diese Differenz zweier Wertsysteme der Variablen x_i einen »Vekt nennen, und zwar den durch die beiden »Punkte« (x_i) und (x'_i) bestimm Vektor, und über die Addition von Vektoren und ihre Multiplikation einer Zahl die obigen Verabredungen treffen. *Dann gelten die sämtlic Axiome.* Für das besondere Koordinatensystem, das aus den oben gegebenen Vektoren $\mathfrak{e}_i$ besteht und dem »Anfangspunkt« $O = (0, 0, \cdots$ sind die Koordinaten eines Punktes (x_i) die Zahlen x_i selber. Der Ha satz über lineare Gleichungen lautet: Diejenigen Punkte, welche h un hängigen linearen Gleichungen genügen, bilden ein $(n - h)$-dimension lineares Punktgebilde.

So würde man auch ohne Geometrie von der Theorie der line Gleichungen her auf die natürlichste Weise nicht nur zu unsern Axio geführt werden, sondern auch zu den weiteren Begriffsbildungen, die an sie angeschlossen haben. Ja es wäre sogar in mancher Hins zweckmäßig (wie namentlich die Formulierung des Satzes über homo Gleichungen zeigt), die Theorie der linearen Gleichungen auf axiomatis Basis in der Weise zu entwickeln, daß man die hier von der Geom

her gewonnenen Axiome an die Spitze stellt. Sie würde dann gültig sein für irgend ein Operationsgebiet, das jenen Axiomen genügt, und nicht bloß für die »Wertsysteme von n Variablen«. Freilich ist der Übergang von einer solchen mehr begrifflichen zu der üblichen, von vornherein mit Zahlen x_i operierenden mehr formalen Theorie ohne weiteres dadurch zu vollziehen, daß man ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde legt und nun statt der Vektoren und Punkte ihre Komponenten und Koordinaten benutzt.

Aus alle dem geht hervor, daß die ganze affine Geometrie über den Raum nur dieses lehrt (man wird uns ohne genauere Erklärung verstehen), daß er *ein dreidimensionales lineares Größengebiet* ist. Alle die anschaulichen Einzeltatsachen, deren in § 1 Erwähnung geschah, sind nur Verkleidungen dieser einen einfachen Wahrheit. Ist es nun auf der einen Seite außerordentlich befriedigend, für die vielerlei Aussagen über den Raum, räumliche Gebilde und räumliche Beziehungen, aus denen die Geometrie besteht, diesen einen gemeinsamen Erkenntnisgrund angeben zu können, so muß auf der andern Seite betont werden, daß dadurch aufs deutlichste hervortritt, wie wenig die Mathematik Anspruch darauf machen kann, das anschauliche Wesen des Raumes zu erfassen: von dem, was den Raum der Anschauung zu dem macht, was er *ist* in seiner ganzen Besonderheit und was er nicht teilt mit »Zuständen von Rechenmaschinen« und »Gasgemischen« und »Lösungssystemen linearer Gleichungen«, enthält die Geometrie nichts. Dies »begreiflich« zu machen oder ev. zu zeigen, warum und in welchem Sinne es unbegreiflich ist, bleibt der Metaphysik überlassen. Wir Mathematiker können stolz sein auf die wunderbare Durchsichtigkeit der Erkenntnis vom Raume, welche wir gewinnen; aber wir müssen uns zugleich sehr bescheiden, da unsere begrifflichen Theorien nur imstande sind, das Raumwesen nach einer Seite hin, noch dazu seiner oberflächlichsten und formalsten, zu erfassen. —

Aus dem Gebiete der linearen Algebra haben wir, um von der affinen zur vollständigen metrischen Geometrie überzuleiten, noch einige Begriffe und Tatsachen nötig, die sich auf *bilineare* und *quadratische Formen* beziehen. Eine Funktion $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ heißt, wenn sie eine lineare Form sowohl in $\mathfrak{x}$ wie in $\mathfrak{y}$ ist, eine Bilinearform. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems ξ_i die Komponenten von $\mathfrak{x}$, η_i die von $\mathfrak{y}$, so gilt eine Gleichung

$$Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ik}. Wir wollen die Form »*nicht-ausgeartet*« nennen, wenn sie für einen Vektor $\mathfrak{x}$ identisch in $\mathfrak{y}$ nur dann verschwindet, falls $\mathfrak{x} = 0$ ist. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die homogenen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i = 0$$

die einzige Lösung $\xi_i = 0$ besitzen oder wenn die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist. Aus der Erklärung geht hervor, daß diese Bedingung des Nicht-Verschwindens der Determinante bei beliebiger linearer Transformation erhalten bleibt. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn $Q(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ist; an den Koeffizienten gibt sich das durch die Symmetrie-Eigenschaft $a_{ki} = a_{ik}$ kund. Aus jeder Bilinearform $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ entsteht eine nur von einem variablen Vektor $\mathfrak{x}$ abhängige *quadratische Form*

$$Q(\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k .$$

Auf diese Weise entsteht jede quadratische Form insbesondere aus einer und nur einer *symmetrischen* Bilinearform. Die eben gebildete quadratische Form $Q(\mathfrak{x})$ kann nämlich auch durch Identifizierung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ erzeugt werden aus der symmetrischen Form

$$\tfrac{1}{2}\{Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}\mathfrak{x})\}.$$

Daß aus zwei verschiedenen symmetrischen Bilinearformen nicht dieselbe quadratische Form hervorgehen kann, ist bewiesen, wenn man zeigt, daß eine symmetrische Bilinearform $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, die identisch in $\mathfrak{x}$ der Gleichung $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ genügt, identisch verschwinden muß. Dies geht aber aus der für jede symmetrische Bilinearform gültigen Relation

$$(9) \qquad Q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y},\ \mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\, Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}\mathfrak{y})$$

hervor. Ist $Q(\mathfrak{x})$ das Zeichen für eine beliebige quadratische Form, so bedeutet $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ immer, ohne daß wir es jedesmal erwähnen, diejenige symmetrische Bilinearform, aus welcher $Q(\mathfrak{x})$ entsteht. Daß eine quadratische Form nicht-ausgeartet sei, soll bedeuten, daß jene symmetrische Bilinearform nicht-ausgeartet ist. Eine quadratische Form $Q(\mathfrak{x})$ ist *positiv-definit*, wenn sie der Ungleichung $Q(\mathfrak{x}) > 0$ für jeden Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ genügt. Eine solche ist gewiß nicht-ausgeartet; denn für keinen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ kann dann $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ identisch in $\mathfrak{y}$ gleich 0 sein, da es für $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ positiv ausfällt.

§ 4. Grundlagen der metrischen Geometrie.

Um den Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie zu bewerkstelligen, müssen wir noch einmal aus dem Born der Anschauung schöpfen. Ihr entnehmen wir (für den dreidimensionalen Raum) die Erklärung jener Größe, die man als das *skalare Produkt* zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet. Nach Wahl eines bestimmten Einheitsvektors messen wir die Länge von $\mathfrak{a}$ und die (mit dem richtigen Vorzeichen zu versehende) Länge der senkrechten Projektion von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ und multiplizieren diese beiden Maßzahlen miteinander. Dabei sind also nicht bloß, wie in der affinen Geometrie, parallele Strecken ihrer Länge nach zu vergleichen, sondern solche von beliebiger Richtung gegeneinander. Für das skalare Produkt gelten folgende Rechengesetze:

$$\lambda\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \lambda(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}); \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}') \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b})$$

und das analoge in bezug auf den zweiten Faktor; außerdem das kommutative $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$. Das skalare Produkt von $\mathfrak{a}$ mit sich selbst, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, ist stets positiv, außer wenn $\mathfrak{a} = 0$, und gleich dem Quadrat der Länge von $\mathfrak{a}$. Diese Gesetze besagen: das skalare Produkt zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ ist eine symmetrische Bilinearform, und die aus ihr entstehende quadratische Form ist positiv-definit. Man erkennt also: nicht die Länge, sondern das Quadrat der Länge eines Vektors hängt in einfacher, rationaler Weise von dem Vektor selbst ab, ist nämlich eine quadratische Form; das macht den eigentlichen Inhalt des *Pythagoreïschen Lehrsatzes* aus. Das skalare Produkt ist nichts anderes als die symmetrische Bilinearform, aus welcher diese quadratische Form entsteht. Wir formulieren demnach folgendes

Metrische Axiom: Nach Wahl eines von 0 *verschiedenen Einheitsvektors* $\mathfrak{e}$ *bestimmen je zwei Vektoren* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *eindeutig eine Zahl* $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$; *sie ist in ihrer Abhängigkeit von den beiden Vektoren eine symmetrische Bilinearform, die aus ihr entstehende quadratische Form* $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x})$ *positiv-definit.* $Q(\mathfrak{e})$ *ist* $= 1$.

Q nennen wir die metrische Fundamentalform. Jetzt gilt: *Eine affine Abbildung, die allgemein den Vektor* $\mathfrak{x}$ *in* $\mathfrak{x}'$ *überführt, ist eine kongruente, wenn sie die metrische Fundamentalform invariant läßt:*

$$Q(\mathfrak{x}') = Q(\mathfrak{x}); \tag{10}$$

*zwei Figuren, die durch kongruente Abbildung ineinander übergeführt werden können, sind kongruent**). Bei unserm axiomatischen Aufbau *definieren* wir durch diese Aussagen den Begriff der Kongruenz. Liegt irgend ein Operationsbereich vor, in welchem die Axiome des § 2 erfüllt sind, so können wir eine beliebige positiv-definite quadratische Form in ihm wählen, sie zur metrischen Fundamentalform »ernennen« und auf Grund ihrer den Begriff der Kongruenz so definieren, wie es eben geschehen ist: dann ist durch jene Form in den affinen Raum eine Metrik eingetragen, und zwar gilt jetzt die gesamte Euklidische Geometrie. Wieder ist die Formulierung, zu der wir gelangt sind, nicht an eine spezielle Dimensionszahl gebunden. Aus (10) folgt mittels der Relation (9) des § 3, daß für eine kongruente Abbildung allgemeiner

$$Q(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}') = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$$

gilt.

Da der Begriff der Kongruenz durch die metrische Fundamentalform definiert ist, so ist es kein Wunder, daß diese in alle Formeln eingeht, welche die Maße geometrischer Größen betreffen. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind dann und nur dann kongruent, wenn

$$Q(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{a}').$$

Wir könnten daher $Q(\mathfrak{a})$ als Maßzahl des Vektors $\mathfrak{a}$ einführen; wir be-

*) Wir unterdrücken hier den Unterschied zwischen direkter und spiegelbildlicher Kongruenz. Er findet schon für affine Abbildungen, und zwar im n-dimensionalen so gut wie im dreidimensionalen Raume, statt.

nutzen aber statt dessen die positive Quadratwurzel aus $Q(\mathfrak{a})$ und nennen diese die Länge des Vektors $\mathfrak{a}$ (das ist jetzt Definition), damit die weitere Bedingung erfüllt ist, daß die Länge der Summe zweier parallеler und gleichgerichteter Vektoren gleich der Summe der Längen der beiden Einzelvektoren ist. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ebenso wie $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ je zwei Vektoren von der Länge 1, so ist die von den beiden ersten gebildete Figur dann und nur dann kongruent mit der aus den beiden letzten bestehenden, wenn

$$Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$$

ist. Wieder aber führen wir nicht diese Zahl $Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ selbst als Maßzahl des *Winkels* ein, sondern eine Zahl ϑ, welche mit ihr durch die transzendente Funktion cos zusammenhängt:

$$\cos\vartheta = Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

damit der Satz gilt, daß sich bei Aneinanderlegung zweier Winkel in der gleichen Ebene die Maßzahlen der Winkel addieren. Der von zwei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ $(\neq 0)$ gebildete Winkel ϑ berechnet sich dann au[s]

$$\cos\vartheta = \frac{Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\sqrt{Q(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b}\mathfrak{b})}}. \tag{11}$$

Insbesondere heißen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *senkrecht* zueinander, wen[n] $Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0$ ist. Diese Erinnerung an die einfachsten metrischen Formel[n] der analytischen Geometrie mag genügen.

Daß der durch (11) definierte Winkel zweier Vektoren immer ree[ll] ist, beruht auf der für jede quadratische Form Q, die für alle Argument[-] werte $\geqq 0$ ist, gültigen Ungleichung

$$Q^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \leqq Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b}). \tag{12}$$

Sie ergibt sich am einfachsten, wenn man bildet:

$$Q(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}) = \lambda^2 Q(\mathfrak{a}) + 2\lambda\mu Q(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mu^2 Q(\mathfrak{b}) \geqq 0.$$

Da die hier hingeschriebene quadratische Form von λ und μ nic[ht] Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, kann ihre »Diskriminante[«] $Q^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b})$ unmöglich positiv sein.

n unabhängige Vektoren $\mathfrak{e}_i$ bilden ein *Cartesisches Koordinatensyste[m]*, wenn für jeden Vektor

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n \tag{13}$$
$$Q(\mathfrak{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ist, d. h. wenn

$$Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) = \begin{cases} 1 \; (i = k) \\ 0 \; (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Alle Cartesischen Koordinatensysteme sind vom Standpunkt der m[e-] trischen Geometrie aus gleichberechtigt. Den sich aufs engste an [die] geometrische Anschauung anschließenden Beweis, daß solche Syste[me] existieren, wollen wir sogleich nicht bloß für eine definite, sondern e[ine] beliebige nicht-ausgeartete quadratische Form erbringen, da später in [der] Relativitätstheorie gerade der indefinite Fall von entscheidender Wichtig[keit] wird. Wir behaupten:

Zu einer nicht-ausgearteten quadratischen Form Q kann man ein solches Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i$ einführen, daß

(14) $$Q(\mathfrak{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

wird.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Vektor $\mathfrak{e}_1$, für den $Q(\mathfrak{e}_1) \neq 0$ ist; indem wir ihn mit einer geeigneten positiven Konstanten multiplizieren, können wir noch erreichen, daß $Q(\mathfrak{e}_1) = \pm 1$ ist. Ein Vektor $\mathfrak{x}$, für den $Q(\mathfrak{e}_1\mathfrak{x}) = 0$ ist, wollen wir auch hier zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonal nennen. Ist $\mathfrak{x}^*$ ein zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonaler Vektor, x_1 eine beliebige Zahl, so gilt für

(15) $$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}^*$$

der »Pythagoreïsche Lehrsatz«:

$$Q(\mathfrak{x}) = x_1^2 Q(\mathfrak{e}_1) + 2x_1 Q(\mathfrak{e}_1\mathfrak{x}^*) + Q(\mathfrak{x}^*) = \pm x_1^2 + Q(\mathfrak{x}^*).$$

Die zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonalen Vektoren bilden eine lineare $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, in welcher $Q(\mathfrak{x})$ eine nicht-ausgeartete quadratische Form ist. Da unser Satz für die Dimensionszahl $n = 1$ selbstverständlich ist, dürfen wir annehmen, er gelte für $n-1$ Dimensionen (Schluß von $n-1$ auf n). Danach existieren $n-1$ zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonale Vektoren $\mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ derart, daß für

$$\mathfrak{x}^* = x_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n$$

die Formel gilt

$$Q(\mathfrak{x}^*) = \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

und daraus erhalten wir für $Q(\mathfrak{x})$ die gewünschte Darstellung. Es ist

$$Q(\mathfrak{e}_i) = \varepsilon_i, \qquad Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) = 0 \quad (i \neq k).$$

Daß die $\mathfrak{e}_i$ alle voneinander linear unabhängig sind und sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in der Gestalt (13) darstellen läßt, ist eine Folge dieser Relationen; sie liefern

(16) $$x_i = \varepsilon_i \cdot Q(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{x}).$$

Für den indefiniten Fall ist ein wichtiger Zusatz zu machen: *Die Anzahlen r und s der positiven und negativen unter den Vorzeichen ε_i sind durch die quadratische Form eindeutig bestimmt;* ich will sagen, sie habe r positive und s negative Dimensionen. (Man pflegt s den Trägheitsindex der quadratischen Form zu nennen, und der eben behauptete Satz ist unter dem Namen des Trägheitsgesetzes bekannt. Auf ihm beruht z. B. die Klassifizierung der Flächen 2. Ordnung.) Wir können die Anzahlen r und s in folgender Weise invariant charakterisieren: *Es gibt r wechselseitig zueinander orthogonale Vektoren $\mathfrak{e}$, für die $Q(\mathfrak{e}) > 0$ ist; aber für einen zu diesen orthogonalen, von 0 verschiedenen Vektor $\mathfrak{x}$ gilt notwendig $Q(\mathfrak{x}) < 0$ — sodaß mehr als r derartige Vektoren $\mathfrak{e}$ nicht existieren können. Entsprechend für s.*

r Vektoren von der gewünschten Art werden durch diejenigen r Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ des der Darstellung (14) zugrunde liegenden Koordinatensystems geliefert, denen die positiven Vorzeichen ε_i korrespondieren; die zu-

gehörigen Komponenten $x_i \, (i = 1, 2, \cdot\cdot, r)$ sind bestimmte Linearformen von $\mathfrak{x}$ [vergl. (16)]: $x_i = L_i(\mathfrak{x})$. Ist nun $\mathfrak{e}_i \, (i = 1, 2, \cdot\cdot, r)$ irgend ein System von Vektoren, die wechselseitig zueinander orthogonal sind und der Bedingung $Q(\mathfrak{e}_i) > 0$ genügen, und $\mathfrak{x}$ ein zu diesen $\mathfrak{e}_i$ orthogonaler Vektor, so können wir eine lineare Kombination

$$\mathfrak{y} = \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \cdots + \lambda_r \mathfrak{e}_r + \mu \mathfrak{x}$$

mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten bestimmen, welche den r homogenen Gleichungen genügt

$$L_1(\mathfrak{y}) = 0, \qquad \cdots, \qquad L_r(\mathfrak{y}) = 0.$$

Dann fällt, wie aus der Normaldarstellung hervorgeht, $Q(\mathfrak{y})$ negativ aus, es sei denn, daß $\mathfrak{y} = 0$ ist. Mittels der Formel

$$Q(\mathfrak{y}) - \{\lambda_1^2 Q(\mathfrak{e}_1) + \cdots + \lambda_r^2 Q(\mathfrak{e}_r)\} = \mu^2 Q(\mathfrak{x})$$

folgt jetzt die Behauptung $Q(\mathfrak{x}) < 0$, außer für den Fall, daß $\mathfrak{y} = 0$; $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ wird; dann aber muß nach Voraussetzung $\mu \neq 0$, also $\mathfrak{x} = 0$ sein.

In der Relativitätstheorie wird der Fall einer quadratischen Form von einer negativen und n-1 positiven Dimensionen von Bedeutung. Im dreidimensionalen Raum ist bei Benutzung affiner Koordinaten

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkt, der aus zwei durch das verschiedene Vorzeichen von x_1 unterschiedenen Mänteln besteht, die nur im Nullpunkt miteinander zusammenhängen. Diese Trennung in zwei Mäntel liefert in der Relativitätstheorie den Gegensatz von Vergangenheit und Zukunft; wir wollen sie hier statt durch Kontinuitätsmerkmale auf elementarem Wege analytisch zu beschreiben versuchen. — Sei also Q eine nicht-ausgeartete quadratische Form von nur einer negativen Dimension. Wir wählen einen Vektor $\mathfrak{e}$, für welchen $Q(\mathfrak{e}) = -1$ ist. Die von 0 verschiedenen Vektoren $\mathfrak{x}$, für welche $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ ist, mögen »negative Vektoren« genannt werden. Nach dem eben geführten Beweis des Trägheitssatzes kann kein negativer Vektor der Gleichung $Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) = 0$ genügen. Sie zerfallen daher in zwei getrennte Klassen oder »Kegel« gemäß der Fallunterscheidung: $Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) < 0$ oder > 0; $\mathfrak{e}$ selbst gehört dem ersten, $-\mathfrak{e}$ dem zweiten Kegel an. Ein negativer Vektor $\mathfrak{x}$ liegt »im Innern« oder »auf dem Mantel« seines Kegels, je nachdem $Q(\mathfrak{x}) < 0$ oder $= 0$ ist. Um zu zeigen, daß die beiden Kegel unabhängig sind von der Wahl des Vektors $\mathfrak{e}$, muß man beweisen: Aus $Q(\mathfrak{e}) = Q(\mathfrak{e}') = -1$, $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ folgt, daß das Vorzeichen von $\dfrac{Q(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})}{Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})}$ gleich dem von $-Q(\mathfrak{e}\mathfrak{e}')$ ist.

Jeden Vektor $\mathfrak{x}$ kann man in zwei Summanden zerlegen

$$\mathfrak{x} = x\mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*$$

derart, daß der erste proportional, der zweite $\mathfrak{x}^*$ orthogonal zu $\mathfrak{e}$ ist. Man hat zu diesem Zwecke nur $x = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})$ zu nehmen, und es wird dann

$$Q(\mathfrak{x}) = -x^2 + Q(\mathfrak{x}^*).$$

$Q(\mathfrak{x}^*)$ ist, wie wir wissen, notwendig $\geqq 0$; schreiben wir dafür Q^*, so zeigt die Gleichung

$$Q^* = x^2 + Q(\mathfrak{x}) = Q^2(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) + Q(\mathfrak{x}),$$

daß Q^* eine quadratische Form von $\mathfrak{x}$ ist (übrigens eine ausgeartete), die der identischen Ungleichung $Q^*(\mathfrak{x}) \geqq 0$ genügt. Wir haben jetzt

$$Q(\mathfrak{x}) = -x^2 + Q^*(\mathfrak{x}) \leqq 0, \qquad Q(\mathfrak{e}') = -e'^2 + Q^*(\mathfrak{e}') < 0.$$
$$\{x = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{x})\} \qquad \{e' = -Q(\mathfrak{e}\mathfrak{e}')\}$$

Aus der auf Q^* anwendbaren Ungleichung (12) folgt

$$\{Q^*(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})\}^2 \leqq Q^*(\mathfrak{e}') \cdot Q^*(\mathfrak{x}) < e'^2 x^2;$$

mithin hat

$$-Q(\mathfrak{e}'\mathfrak{x}) = e'x - Q^*(\mathfrak{e}'\mathfrak{x})$$

das Vorzeichen des ersten Summanden $e'x$.

Wir lenken zu dem uns gegenwärtig interessierenden Fall einer positiv-definiten metrischen Grundform zurück. Benutzen wir zur Darstellung einer kongruenten Abbildung ein Cartesisches Koordinatensystem, so werden die Transformationskoeffizienten α_{ik} in Formel (5'), § 2 so beschaffen sein müssen, daß identisch in den ξ die Gleichung

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_n'^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

besteht. Das liefert die »Orthogonalitätsbedingungen«

$$(17) \qquad \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ri}\alpha_{rj} = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}.$$

Sie besagen, daß beim Übergang zur inversen Abbildung die Koeffizienten α_{ik} sich in α_{ki} verwandeln:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_k'.$$

Daraus folgt noch, daß die Determinante $\Delta = |\alpha_{ik}|$ einer kongruenten Abbildung mit der ihrer inversen identisch ist, und da ihr Produkt $= 1$ sein muß, demnach $\Delta = \pm 1$ wird. (Das eine oder das andere Vorzeichen wird eintreten, je nachdem es sich um eigentliche oder spiegelbildliche Kongruenz handelt.)

Für die analytische Behandlung der metrischen Geometrie ergeben sich zwei Möglichkeiten. *Entweder* man unterwirft das zu benutzende affine Koordinatensystem keiner Einschränkung; dann gilt es, eine Theorie der Invarianz gegenüber beliebigen linearen Transformationen zu entwickeln, in welcher aber zum Unterschied von der affinen Geometrie ein für allemal eine bestimmte invariante quadratische Form, die metrische Grundform

$$Q(\mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi_i\xi_k$$

als absolutes Datum zur Verfügung steht. *Oder* aber man benutzt von vornherein nur Cartesische Koordinatensysteme; dann handelt es sich um eine Theorie der Invarianz gegenüber orthogonalen Transformationen, d. h. solchen linearen Transformationen, deren Koeffizienten die Nebenbedingungen (17) erfüllen. Wir müssen hier, um spätere Verallgemeinerungen, die über die Euklidische Geometrie hinausführen, daran anknüpfen zu können, den ersten Weg einschlagen. Er erscheint auch algebraisch von vornherein als der einfachere, da es leichter sein wird, einen Über-

blick über diejenigen Ausdrücke zu gewinnen, die bei *allen* linearen Transformationen ungeändert bleiben, als über diejenigen, welche sich nur gegenüber den orthogonalen Transformationen invariant verhalten (einer Klasse von Transformationen, die durch nicht leicht zu beherrschende Nebenbedingungen eingeschränkt sind). Wir werden hier die Invariantentheorie, als »*Tensorrechnung*«, in solcher Gestalt entwickeln, daß sie uns die sachgemäße mathematische Fassung nicht nur der geometrischen, sondern auch aller physikalischen Gesetze ermöglicht.

§ 5. Tensoren.

Wir haben im vorhergehenden eine Verschiebung als Vektor bezeichnet. In der Kinematik, Mechanik und Physik gewinnt aber der Begriff »Vektor« eine allgemeinere Bedeutung; wir nennen so jede Größe, die nach Wahl einer bestimmten Maßeinheit eindeutig und ohne Willkür durch eine Verschiebung repräsentiert werden kann. Die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes ist ein geläufiges Beispiel aus der Kinematik. Auch die *Kraft* ist in diesem Sinne ein Vektor. In der neueren Physik ist aber statt der Kraft der Begriff der Arbeit, der Energie als der entscheidende in den Vordergrund getreten; daraus ergibt sich eine andere, wie wir heute glauben, dem Wesen der Kraft besser entsprechende Repräsentation derselben als durch eine Verschiebung. Eine gegebene Kraft leistet bei jeder (»virtuellen«) Verschiebung ihres Angriffspunktes eine gewisse *Arbeit*; diese Arbeit ist eine lineare Form der Verschiebung. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems ξ^1, ξ^2, ξ^3 die Komponenten der willkürlichen Verschiebung, so ist die Arbeit also

$$= p_1 \xi^1 + p_2 \xi^2 + p_3 \xi^3, \tag{18}$$

wo p_1, p_2, p_3 Konstante sind, welche zur Charakterisierung der Kraft in dem gewählten Koordinatensystem dienen können; diese Zahlen nennen wir daher die »Komponenten der Kraft«. Gehen wir zu einem andern Koordinatensystem über, wobei sich die Komponenten der Verschiebung gemäß den Formeln

$$\xi^i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{\xi}^k \tag{19}$$

transformieren, so bestimmen sich die Komponenten $\bar{p}_i$ der Kraft im neuen Koordinatensystem aus der Forderung, daß identisch in den $\bar{\xi}^i$

$$\sum_i p_i \xi^i = \sum_i \bar{p}_i \bar{\xi}^i$$

sein muß; das ergibt die Transformationsformeln

$$\bar{p}_i = \sum_k \alpha_{ki} p_k .$$

Die Kräfte bilden in dem Sinne ein dreidimensionales System von Vektoren, daß für sie die Vektoraxiome des § 2 gültig sind. Denn jede Kraft ist unabhängig vom Koordinatensystem dargestellt durch eine Linear-

form (einer willkürlichen Verschiebung); Linearformen aber kann man addieren und mit einer Zahl multiplizieren. In den Ausdruck (18) der Arbeit gehen die Verschiebungskomponenten ξ und die Kraftkomponenten p in völlig symmetrischer Weise ein. Bisher haben wir die p als Konstante, die ξ als Variable betrachtet. Wir können jetzt aber auch umgekehrt die p variabel, die ξ konstant nehmen. Wie wir vorhin eine Kraft charakterisiert haben durch die Arbeit, welche sie bei einer willkürlichen Verschiebung leistet, charakterisieren wir jetzt eine gegebene Verschiebung durch die Arbeit, welche eine willkürliche Kraft bei dieser Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet; sie ist eine lineare homogene Funktion der willkürlichen Kraft. Das Verhältnis von Kraft und Verschiebung ist ein durchaus wechselseitiges. Kenner der projektiven Geometrie werden bemerken, daß hier ein genaues Seitenstück vorliegt zu der Dualität von Punkt- und Ebenen-Koordinaten; nur spielen in der projektiven Geometrie allein die homogenen linearen *Gleichungen* eine Rolle, hier aber die homogenen linearen *Formen* selbst.

Um die vorliegenden Verhältnisse in ihrer natürlichen Symmetrie und unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl $n = 3$ rein mathematisch darzustellen, werden wir also von *zwei* Reihen von Variablen

$$\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n \quad \Big| \quad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

ausgehen, die wir etwa nach der Art der Indizesbezeichnung als »obere« und »untere« Variable unterscheiden. Ein Wertsystem der oberen Variablen heißt eine »Verschiebung«, ein Wertsystem der unteren Variablen eine »Kraft«. Transformieren wir die oberen Variablen gemäß den Gleichungen (19), in denen die α_{ik} irgendwelche Konstanten mit einer von 0 verschiedenen Determinante sind, gleichzeitig aber die unteren Variablen gemäß den Gleichungen

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k, \tag{20}$$

so wollen wir diesen Prozeß als eine »lineare Transformation« oder auch als den Übergang zu einem neuen Koordinatensystem bezeichnen — nach der Bedeutung, welche diesem Prozeß in den geometrischen und physikalischen Anwendungen zukommt. Bei einer solchen Transformation ist das Produkt von Kraft und Verschiebung, die »Arbeit«, invariant:

$$\sum_i \xi_i \xi^i = \sum_i \bar{\xi}_i \bar{\xi}^i.$$

Wir untersuchen jetzt Linearformen, Bilinearformen, Trilinearformen, ... dieser Variablen: sie heißen *Tensoren 1., 2., 3., ... Stufe* (oder vom *Range* 1, 2, 3, ...) und die Koeffizienten der Form die *Tensorkomponenten*. So ist z. B., wenn ξ^i, η^i zwei willkürliche Verschiebungen, ζ_i eine willkürliche Kraft ist, die Form

$$\sum_{i,k,l} a^l_{ik} \xi^i \eta^k \zeta_l$$

ein Tensor 3. Stufe; seine Komponenten a^l_{ik} heißen *kovariant* in bez auf die Indizes i, k (die mit den Verschiebungsvariablen verknüpft sin *kontravariant* in bezug auf den (mit den Kraftvariablen verknüpft Index l. Indem wir auf unsere Trilinearform den Prozeß der linea Transformation nach (19), (20) zur Anwendung bringen, erhalten wir d Ausdruck und die Komponenten $\bar{a}^l_{ik}$ des Tensors im neuen, »überstrichene Koordinatensystem:

$$\sum_{i,k,l} \bar{a}^l_{ik} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l = \sum_{i,k,l} a^l_{ik} \xi^i \eta^k \zeta_l .$$

In der Physik werden wir eine Größe z. B. einen kovarianten Ten 2. Stufe nennen, wenn jeder Einzelwert dieser Größe (nach Wahl ei Maßeinheit) eindeutig und ohne Willkür, insbesondere unabhängig v jedem räumlichen Koordinatensystem, eine Bilinearform zweier willk licher Verschiebungen bestimmt und wenn durch Angabe dieser Biline form der betr. Wert der Größe unter allen ihren möglichen Werten v ständig festgelegt ist. In diesem Sinne ist nach dem Obigen die K selber ein kovarianter, die Verschiebung ein kontravarianter Tensor 1. St — Tensoren 1. Stufe heißen *Vektoren* (das soll die endgültige Definit dieses Namens sein).

Wann eine Bilinearform $F(\xi\eta)$ zweier willkürlicher Verschiebun ξ, η *nicht-ausgeartet*, wann sie *symmetrisch* heißt, ist bereits in § 3 klärt worden. Wir nennen sie *schief-symmetrisch*, wenn $F(\eta\xi) = - F($ ist; an den Koeffizienten a_{ik} gibt sich das durch das Bestehen der G chungen $a_{ki} = - a_{ik}$ kund. Unter den »gemischten«, in bezug auf ei Index kovarianten, in bezug auf den andern kontravarianten Tenso 2. Stufe gibt es einen ausgezeichneten, die »Arbeit«:

$$\sum_i \xi^i \eta_i \left(= \sum_i \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i \right),$$

der in jedem Koordinatensystem die Komponenten

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{cases}$$

besitzt.

Einen wichtigen kovarianten Tensor 2. Stufe haben wir bereits bei Grundlegung der metrischen Geometrie kennen gelernt, das skalare dukt zweier willkürlicher Verschiebungen. Wir nennen ihn den metris Fundamentaltensor; er ist symmetrisch und nicht-ausgeartet. Auf se Existenz beruht die Möglichkeit, eine Kraft, so wie wir den Begriff gefaßt haben, durch eine Verschiebung zu repräsentieren. In der tun wir dies in der üblichen Weise, so ist die Arbeit, welche die bei der virtuellen Verschiebung ξ leistet, gleich dem skalaren Pro der Verschiebung ξ und derjenigen p, durch welche die Kraft darge wird. Beziehen wir uns auf ein bestimmtes Koordinatensystem, in wel der metrische Fundamentaltensor die Komponenten g_{ik} hat, so ist sie

$$= \sum_{i,k} g_{ik} \xi^i p^k .$$

Zwischen den Komponenten p^i der die Kraft darstellenden Verschiebung und den Größen p_i, die wir oben als Komponenten der Kraft eingeführt haben, besteht also der Zusammenhang

$$p_i = \sum_k g_{ik} p^k. \tag{21}$$

Man kann das Wesen der Metrik geradezu darin erblicken — wenn man sich nur davon frei macht, den Begriff »Geometrie« in einem allzu engen Sinne zu fassen —, daß zwischen Verschiebungen und Kräften eine solche umkehrbar-eindeutige Beziehung besteht, welche 1) *linear* ist [der Summe zweier Kräfte entspricht die Summe der korrespondierenden Verschiebungen, dem λ-fachen einer Kraft das λ-fache der entsprechenden Verschiebung] und 2) »*polaren*« Charakter trägt: das Produkt aus einer Kraft und einer Verschiebung (die Arbeit) ist gleich dem Produkt der korrespondierenden Verschiebung und Kraft (Symmetrie der g_{ik}). —

Während die Ausführungen der vorigen Absätze nur affine Geometrie voraussetzten, treten somit im *metrischen Raum* folgende besondere Verhältnisse ein. Man kann jedes Wertsystem der oberen Variablen ξ^i in umkehrbar-eindeutiger Weise mit einem bestimmten Wertsystem der unteren Variablen *koppeln* durch die Gleichungen

$$\xi_i = \sum_k g_{ik} \xi^k. \tag{22}$$

Diese Koppelung hat invarianten Charakter. Nehmen wir nämlich eine zweite willkürliche Verschiebung η^i zu Hilfe, so gilt bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem

$$\sum_{ik} g_{ik} \xi^k \eta^i = \sum \bar{g}_{ik} \bar{\xi}^k \bar{\eta}^i,$$

und wenn ξ_i ein beliebiges Wertsystem der unteren Variablen ist,

$$\sum \xi_i \eta^i = \sum \bar{\xi}_i \bar{\eta}^i.$$

Besteht demnach im ursprünglichen Koordinatensystem der Zusammenhang (22), so gelten im neuen die entsprechenden Gleichungen

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \bar{g}_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Die Koppelung ist eine umkehrbar-eindeutige, da wegen des Nicht-Verschwindens der Determinante $|g_{ik}|$ die Gleichungen (22) eindeutig nach ξ^i aufgelöst werden können:

$$\xi^i = \sum_k \mathfrak{g}^{ik} \xi_k. \tag{23}$$

Aus der Symmetrie der g_{ik} folgt die Symmetrie der Koeffizienten $\mathfrak{g}^{ik}$ der aufgelösten oder »inversen« Gleichungen (23). Indem wir in der metrischen Geometrie ein für allemal die Koppelung (22) zwischen den oberen und unteren Variablen einführen, behalten wir dort nur *eine* Reihe unabhängiger Variablen; doch bleibt uns jederzeit die freie Wahl, ob wir die oberen oder die unteren als unabhängige betrachten wollen.

Zufolge der Koppelung (22) gilt für eine beliebige Linearform eine Gleichung

$$(24) \qquad \sum_i a_i \xi^i = \sum_i a^i \xi_i,$$

wo zwischen den Koeffizienten a_i und a^i der Zusammenhang

$$a_i = \sum_k g_{ki}\, a^k = \sum_k g_{ik}\, a^k$$

besteht. Die a_i hatten wir die kovarianten, die a^i die kontravarianten Komponenten eines Vektors genannt; das Statthaben der Gleichungen (24) aber werden wir naturgemäß so ausdrücken: a^i sind die kontravarianten Komponenten *desselben* Vektors, dessen kovariante Komponenten die a_i sind; denn es sind die Koeffizienten *derselben* Linearform, diese einmal als Funktion der oberen, einmal als Funktion der unteren Variablen ge-schrieben. Eine Verschiebung sowohl wie eine Kraft ist jetzt als ein Vektor zu bezeichnen. Die Verschiebung ξ hat die kontravarianten Kom-ponenten ξ^i und die aus (22) sich ergebenden kovarianten ξ_i; die Kraf p hat die kovarianten Komponenten p_i und die aus (21) durch Auflösun sich ergebenden kontravarianten p^i. — Bei einem Tensor höherer Stuf verhält sich die Sache genau entsprechend wie bei Vektoren. Für ein Bilinearform gelten, wenn die oberen und unteren Variablen ein für alle mal durch (22) gekoppelt sind, Gleichungen

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi^i \eta^k = \sum_{ik} a_i^{\ k}\, \xi^i \eta_k = \sum_{ik} a^i_{\ k}\, \xi_i \eta^k = \sum_{ik} a^{ik}\, \xi_i \eta_k.$$

Die hier auftretenden Größen a_{ik}, $a_i^{\ k}$, $a^i_{\ k}$, a^{ik} sind die kovarianten gemischten und kontravarianten Komponenten *eines und desselben* Tensor 2. Stufe. Wir treffen hinsichtlich der Bezeichnung für immer die Ve abredung, daß wir die kovarianten, gemischten und kontravarianten Kom ponenten desselben Tensors mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen un durch die Stellung des Index oben oder unten angeben, ob die Kompo nenten hinsichtlich dieses Index kontra- oder kovariant sind.

Für den Fundamentaltensor selbst gilt insbesondere

$$\sum g_{ik}\, \xi^i \eta^k = \sum \xi^i \eta_i = \sum \xi_i \eta^i = \sum \mathfrak{g}^{ik}\, \xi_i \eta_k\,;$$

die gemischten Komponenten dieses Tensors sind also $g_i^{\ k} = \delta_i^{\ k}$, d kontravarianten $g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}$. Die Koeffizienten des zu (22) inversen Gle chungssystems (23) werden demnach von den kontravarianten Komponent g^{ik} des Fundamentaltensors gebildet, und wir werden sie daher in d Folge nicht mehr mit $\mathfrak{g}^{ik}$, sondern mit g^{ik} bezeichnen.

In einem *Cartesischen* Koordinatensystem, in welchem der Fund mentaltensor die Komponenten

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{cases}$$

hat, lauten die Koppelungsgleichungen (22) einfach: $\xi_i = \xi^i$. Beschränk wir uns auf den Gebrauch Cartesischer Koordinatensysteme, so brau

zwischen kovariant und kontravariant nicht unterschieden zu werden. — Es ist aber zu erwähnen, daß die bisher auseinandergesetzten Begriffe hinsichtlich des Fundamentaltensors g_{ik} nur voraussetzen, daß er symmetrisch und nicht-ausgeartet ist, während der Einführung eines Cartesischen Koordinatensystems der weitere Umstand zugrunde liegt, daß die korrespondierende quadratische Form positiv-definit ist. Das ist nicht gleichgültig. In der Relativitätstheorie tritt zu den drei Raumkoordinaten als vierte gleichberechtigt die Zeitkoordinate hinzu, und die Maßbestimmung, die in dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit gilt, beruht nicht auf einer definiten, sondern einer indefiniten Form (Kap. III). In dieser Mannigfaltigkeit werden wir also, wenn wir uns auf reelle Koordinaten beschränken, kein Cartesisches Koordinatensystem einführen können; aber die hier entwickelten Begriffe, die auf die Dimensionenzahl $n = 4$ zu spezialisieren sind, behalten ihre volle Anwendbarkeit.

In das System der Tensoren reihen sich die *Skalare* oder *Invarianten* — ein Skalar ist eine Größe, deren einzelner Wert nach Wahl einer bestimmten Maßeinheit durch eine vom Koordinatensystem unabhängige Zahl a gegeben werden kann; eine Zahl a also, die sich beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem gemäß der Gleichung $a = \bar{a}$ transformiert — als Tensoren o. Stufe ein.

Die geometrischen und physikalischen Größen sind Skalare, Vektoren und Tensoren: darin spricht sich die mathematische Beschaffenheit des Raumes aus, in welchem diese Größen existieren. Die dadurch bedingte mathematische Symmetrie ist keineswegs auf die Geometrie beschränkt, sondern kommt im Gegenteil erst in der Physik recht zur Geltung: weil die Naturvorgänge in einem metrischen Raum sich abspielen, ist die Tensorrechnung das natürliche mathematische Instrument zum Ausdruck der Gesetzmäßigkeit, welche diese Vorgänge beherrscht.

§ 6. Tensoralgebra. Beispiele.

Addition von Tensoren. Durch Multiplikation einer Linearform, Bilinearform oder Trilinearform . . . mit einer Zahl, ebenso durch Addition zweier Linearformen oder zweier Bilinearformen . . . entsteht immer wiederum eine derartige Form. Vektoren und Tensoren kann man also mit einer Zahl (einem Skalar) multiplizieren und zwei oder auch mehrere Tensoren der gleichen Stufe addieren. Diese Operationen werden an den Komponenten durch Multiplikation mit der betr. Zahl, bezw. durch Addition ausgeführt. Im Gebiete der Tensoren jeder Stufe gibt es einen ausgezeichneten Tensor o, dessen sämtliche Komponenten verschwinden; zu einem beliebigen Tensor der gleichen Stufe addiert, ändert er diesen nicht. — Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch die Angabe der Werte gewisser Skalare und Tensoren beschrieben; daß ein aus ihnen durch mathematische Operationen gebildeter invarianter (d. h. nur von ihnen, nicht aber von der Wahl des Koordinatensystems abhängiger) Tensor = o ist, darin besteht allgemein die Aussage eines Naturgesetzes.

Beispiele. Die Bewegung eines Punktes wird analytisch in der Weise dargestellt, daß man den Ort des beweglichen Punktes, bezw. dessen Koordinaten x_i als Funktionen der Zeit t angibt. Die Ableitungen $\frac{dx_i}{dt}$ für einen bestimmten Moment t transformieren sich beim Übergang zu einem andern affinen Koordinatensystem so wie die Verschiebungskomponenten ξ^i; sie sind also kontravariante Komponenten u^i eines Vektors »*Geschwindigkeit*«. Durch Multiplikation mit der Masse m des bewegten Punktes, einem Skalar, der die Trägheit der Materie zum Ausdruck bringt, erhält man den »*Impuls*« (oder »*Bewegungsgröße*«). Durch Addition der Impulse mehrerer Massenpunkte, bezw. aller derer, aus denen man sich in der Punktmechanik einen starren Körper zusammengesetzt denkt, erhält man den Gesamt-Impuls des Punktsystems oder des starren Körpers. Bei kontinuierlicher Massenausbreitung sind die Summen durch Integrale zu ersetzen. Das Grundgesetz der Bewegung lautet, wenn G^i die kontravarianten Komponenten des Impulses eines Massenpunktes, p^i die der Kraft sind:

$$\frac{dG^i}{dt} = p^i; \qquad G^i = mu^i. \tag{25}$$

Da nach unserer Auffassung die Kraft von Hause aus ein kovarianter Vektor ist, ist dieses Grundgesetz nur in einem metrischen, nicht in einem rein affinen Raum möglich. Dasselbe Gesetz gilt für den Gesamtimpuls eines starren Körpers und die an ihm angreifende Gesamtkraft.

Multiplikation von Tensoren. Durch Multiplikation zweier Linearformen $\sum_i a_i \xi^i$, $\sum_i b_i \eta^i$, die von zwei unabhängigen, willkürlichen Verschiebungen ξ und η abhängen, erhält man eine Bilinearform

$$\sum_{ik} a_i b_k \xi^i \eta^k$$

und damit aus den beiden Vektoren a und b einen Tensor 2. Stufe c:

$$a_i b_k = c_{ik}. \tag{26}$$

Durch die Gleichung (26) wird ein invarianter Zusammenhang zwischen den Vektoren a und b und dem Tensor c dargestellt; d. h. bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem gelten für die (überstrichenen) Komponenten dieser Größen im neuen Koordinatensystem genau dieselben Gleichungen

$$\bar{a}_i \bar{b}_k = \bar{c}_{ik}.$$

In derselben Weise läßt sich z. B. die Multiplikation eines Tensors 1. Stufe mit einem Tensor 2. Stufe (allgemein eines Tensors beliebiger Stufe mit einem Tensor beliebiger Stufe) vollziehen; durch Multiplikation von

$$\sum_i a_i \xi^i \quad \text{mit} \quad \sum_{ik} b_i^k \eta^i \zeta_k,$$

worin die griechischen Buchstaben, je nachdem sie ihre Indizes oben o

unten tragen, willkürliche Wertsysteme der oberen oder unteren Variablen bedeuten, entspringt die trilineare Form

$$\sum_{ikl} a_i b_k^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

und somit durch Multiplikation der beiden Tensoren 1. und 2. Stufe ein Tensor c der 3. Stufe:

$$a_i \cdot b_k^l = c_{ik}^l.$$

An den Komponenten ist diese Multiplikation also einfach dadurch auszuführen, daß jede Komponente des einen Tensors mit jeder Komponente des andern multipliziert wird; *die Indizes müssen dabei völlig getrennt gehalten werden.* Es ist noch zu beachten, daß beispielsweise die in bezug auf den Index l kovarianten Komponenten des soeben gebildeten Tensors 3. Stufe

$$c_{ik}^l = a_i b_k^l \text{ durch } c_{ikl} = a_i b_{kl}$$

gegeben sind. In solchen Multiplikationsformeln ist es also ohne weiteres gestattet, irgend einen Index auf beiden Seiten der Gleichung von unten nach oben oder von oben nach unten zu schaffen.

Beispiele schiefsymmetrischer und symmetrischer Tensoren. Aus zwei Vektoren mit den kontravarianten Komponenten a^i, b^i entsteht durch Multiplikation in der einen und andern Reihenfolge und nachfolgende Subtraktion ein schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe c mit den kontravarianten Komponenten

$$c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i.$$

In der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt dieser Tensor auf als »vektorielles Produkt« der beiden Vektoren a und b. Zeichnet man im dreidimensionalen Raum einen bestimmten Schraubungssinn aus, so ist es nämlich möglich, eine einfache umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen diesen Tensoren und den Vektoren herzustellen, die es gestattet, den Tensor c durch einen Vektor zu repräsentieren. (Im vierdimensionalen Raum ist dies schon deshalb ausgeschlossen, weil dort ein schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe 6 unabhängige Komponenten besitzt, ein Vektor aber nur 4; ebenso in Räumen von noch höherer Dimensionszahl.) Für die Dimensionszahl 3 aber beruht die erwähnte Darstellung auf folgendem. Benutzen wir lediglich Cartesische Koordinatensysteme und führen neben a und b noch eine willkürliche Verschiebung ξ ein, so multipliziert sich beim Übergang von einem Cartesischen Koordinatensystem zu einem andern die Determinante

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = c^{23}\xi^1 + c^{31}\xi^2 + c^{12}\xi^3$$

mit der Determinante der Transformationskoeffizienten. Für eine orthogonale Transformation ist aber diese Determinante $= \pm 1$. Beschränken

wir uns auf die »eigentlichen« orthogonalen Transformationen, für wel diese Determinante $= + 1$ ist, so bleibt jene Linearform der ξ ungeändert; demgemäß ist durch die Formeln

$$c^{23} = c_1^*, \quad c^{31} = c_2^*, \quad c^{12} = c_3^*$$

mit dem schiefsymmetrischen Tensor c ein Vektor c^* in einer W verknüpft, die invariant ist gegenüber eigentlichen orthogonalen Tr formationen. Der Vektor c^* ist senkrecht zu den beiden Vektoren a b, und seine Größe ist (nach elementaren Formeln der analytischen metrie) gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren a und b au spannten Parallelogramms. — Die Ersetzung der schiefsymmetris Tensoren durch Vektoren in der üblichen Vektorrechnung mag im teresse der Bezeichnungsökonomie gerechtfertigt sein. Sie verdeckt in mancher Hinsicht das Wesen der Sache und gibt z. B. in der Elel dynamik zu den berüchtigten Schwimmregeln Anlaß, die keineswegs Ausdruck dafür sind, daß in dem Raum, in dem sich die elektr namischen Vorgänge abspielen, ein ausgezeichneter Schraubungs herrscht, sondern nur notwendig werden, weil man die magnetische stärke als Vektor betrachtet, während sie in Wahrheit (wie das vektorielle Produkt zweier Vektoren) ein schiefsymmetrischer Tensor Wäre uns eine Raumdimension mehr beschert, so hätte es niemal einem solchen Irrtum kommen können.

In der Mechanik tritt das schiefsymmetrische Tensorprodukt zv Vektoren auf 1) als *Drehimpuls (Impulsmoment)* um einen Punkt O: Bef sich in P ein Massenpunkt und sind ξ^1, ξ^2, ξ^3 die Komponenten $\overrightarrow{OP}$, ferner u^i die (kontravarianten) Komponenten der Geschwindi jenes Punktes im betrachteten Moment, m seine Masse, so ist der Drehin definiert durch

$$L^{ik} = m\,(u^i \xi^k - u^k \xi^i).$$

Der Drehimpuls eines starren Körpers um einen Punkt O ist die Su der den einzelnen Massenpunkten des Körpers zugehörigen Drehimp 2) tritt es auf als *Drehmoment einer Kraft.* Greift diese im Punk an und sind p^i ihre kontravarianten Komponenten, so ist dasselbe defi durch

$$q^{ik} = p^i \xi^k - p^k \xi^i.$$

Für einen Massenpunkt wie auch für einen frei beweglichen starren K gilt neben (25) das Gesetz

$$\frac{dL^{ik}}{dt} = q^{ik}; \tag{27}$$

für Drehung eines starren Körpers um den festgehaltenen Punkt O allein das Dreh-Gesetz (27).

Ein weiteres Beispiel eines schiefsymmetrischen Tensors ist die *D geschwindigkeit* eines starren Körpers um den festen Punkt O. Bei beliebigen Drehung gehe der Punkt P mit den Koordinaten ξ^i (wi

nutzen O als Nullpunkt) über in einen Punkt $*P$ mit den Koordinaten $*\xi^i$; es ist dann

$$*\xi^i = \sum_k \alpha^i_k \xi^k,$$

wo die α^i_k konstante (vom Punkte P unabhängige) Koeffizienten sind. Für eine unendlichkleine Drehung gehe der Punkt (ξ^i) über in den Punkt mit den Koordinaten $\xi^i + \delta\xi^i$; dann sind die $\delta\xi^i$ lineare Funktionen der ξ^i:

(28) $$\delta\xi^i = \sum_k v^i_k \xi^k.$$

Auch $\delta\xi^i$ sind (wie ξ^i) die (kontravarianten) Komponenten einer Verschiebung. Ist also η_i irgend ein Wertsystem der unteren Variablen, so ist

$$\sum_i \eta_i \delta\xi^i = \sum_{ik} v^i_k \eta_i \xi^k$$

eine Invariante; v^i_k sind mithin die Komponenten eines im Index k kovarianten, im Index i kontravarianten Tensors. Für eine Drehung muß

$$\delta \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \xi^k = \delta \sum \xi_i \xi^i = 0$$

sein, und das liefert

$$\sum_i \xi_i \delta\xi^i = 0.$$

Setzen wir die Ausdrücke (28) ein, so kommt

$$\sum_{ik} v^i_k \xi_i \xi^k = \sum_{ik} v_{ik} \xi^i \xi^k = 0.$$

Das muß identisch in den Variablen ξ^i gelten, und daher ist

$$v_{ki} + v_{ik} = 0;$$

der Tensor mit den kovarianten Komponenten v_{ik} ist also schiefsymmetrisch.

Bei der Bewegung eines starren Körpers erfährt der Körper während der unendlichkleinen Zeit δt eine unendlichkleine Drehung. Wir brauchen den eben gebildeten infinitesimalen Drehungstensor v nur durch δt zu dividieren, um (im Limes für $\delta t = 0$) den schiefsymmetrischen Tensor »Winkelgeschwindigkeit« zu erhalten, den wir wiederum mit v bezeichnen wollen. Die Formeln (28) gehen dabei, wenn u^i die kontravarianten, u_i die kovarianten Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes P bedeuten, über in die Grundformel der Kinematik des starren Körpers:

(29) $$u_i = \sum_k v_{ik} \xi^k.$$

Die Existenz der »momentanen Drehaxe« folgt aus dem Umstand, daß die linearen Gleichungen

$$\sum_k v_{ik} \xi^k = 0$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten v_{ik} *im Falle* $n = 3$ stets

Lösungen besitzen, die von der trivialen $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$ verschieden sind. — Auch die Winkelgeschwindigkeit pflegt meistens als ein Vektor dargestellt zu werden.

Endlich bietet das bei der Drehung eines Körpers auftretende *Trägheitsmoment* ein einfaches Beispiel für einen symmetrischen Tensor 2. Stufe. Ist der Nullpunkt O wieder der feste Drehpunkt und befindet sich im Punkte P mit den Koordinaten ξ^i ein Massenpunkt von der Masse m, so nennen wir den symmetrischen Tensor, dessen kontravariante Komponenten durch $m\xi^i\xi^k$ gegeben sind (Multiplikation!), die »Rotationsträgheit« des Massenpunktes (für den Drehpunkt O). Die Rotationsträgheit T^{ik} eines Punktsystems oder Körpers ist definiert als die Summe dieser für seine einzelnen Punkte P zu bildenden Tensoren. Die Definition weicht von der üblichen ab; sie ist aber die richtige, wenn man Ernst damit macht, die Rotationsgeschwindigkeit als einen schiefsymmetrischen Tensor und nicht als einen Vektor aufzufassen (wie wir alsbald sehen werden). Für Drehung um O spielt der Tensor T^{ik} die gleiche Rolle wie der Skalar m für Translationsbewegung.

Verjüngung. Sind a_i^k die gemischten Komponenten eines Tensors 2. Stufe, so ist $\sum_i a_i^i$ eine Invariante. Sind also $\bar{a}_i^k$ die gemischten Komponenten desselben Tensors nach Übergang zu einem neuen Koordinatensystem, so ist

$$\sum_i a_i^i = \sum_i \bar{a}_i^i.$$

Beweis: Ist ξ^i ein willkürliches Wertsystem der oberen, η_i der unterer Variablen, so besteht die Gleichung

$$\sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k = \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k.$$

Ist ζ_k^i ein willkürlicher in k kovarianter, in i kontravarianter Tensor, s drücken sich die Komponenten $\bar{\zeta}_k^i$ im neuen Koordinatensystem in ge wisser Weise linear durch die Komponenten ζ_k^i im alten aus. $\xi^i\eta_k$ ist ei spezieller solcher Tensor.

$$\sum_{ik} a_i^k \zeta_k^i - \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\zeta}_k^i$$

ist nach Einführung jener Ausdrücke eine gewisse Linearform der ζ etwa $= \sum \gamma_{ik} \zeta_k^i$. Dieselbe verschwindet identisch in den ξ und wenn wir $\zeta_k^i = \xi^i \eta_k$ einsetzen. Folglich sind alle ihre Koeffizienten und es besteht allgemein die Gleichung

$$\sum_{ik} a_i^k \zeta_k^i = \sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\zeta}_k^i.$$

Wählen wir darin für ζ insbesondere den Tensor mit den Komponent

$$\zeta_k^i = \delta_k^i = \begin{cases} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{cases},$$

so ist auch $\bar{\zeta}^i_k = \delta^i_k$, und es kommt

$$\sum_i a^i_i = \sum_i \bar{a}^i_i.$$

Wir können aus diesem Satz sogleich eine allgemeine Rechenoperation für Tensoren, die »Verjüngung«, herleiten, die als zweite neben die Multiplikation tritt. Indem wir in den gemischten Komponenten eines Tensors einen bestimmten oberen mit einem bestimmten unteren Index zusammenfallen lassen und nach ihm summieren, erhalten wir aus dem gegebenen Tensor einen neuen, von einer um 2 geringeren Stufenzahl; z. B. aus den Komponenten a^{lm}_{hik} eines Tensors 5. Stufe die Komponenten

$$\sum_r a^{lr}_{hir} = c^l_{hi} \tag{30}$$

eines Tensors 3. Stufe. Der durch (30) dargestellte Zusammenhang ist invariant, d. h. drückt sich in der gleichen Weise nach dem Übergang zu einem neuen Koordinatensystem aus:

$$\sum_r \bar{a}^{lr}_{hir} = \bar{c}^l_{hi}. \tag{31}$$

Wir brauchen, um das einzusehen, nur zwei willkürliche Wertsysteme ξ^i, η^i der oberen, ein willkürliches Wertsystem ζ_i der unteren Variablen zu wählen und unsern obigen Satz auf den Tensor 2. Stufe

$$\sum_{hil} a^{lm}_{hik}\, \xi^h \eta^i \zeta_l = f^m_k$$

anzuwenden. Definieren wir die c durch (30), die $\bar{c}$ durch (31), so liefert die Gleichung

$$\sum_r f^r_r = \sum_r \bar{f}^r_r$$

dann die Formel

$$\sum_{hil} c^l_{hi}\, \xi^h \eta^i \zeta_l = \sum_{hil} \bar{c}^l_{hi}\, \bar{\xi}^h \bar{\eta}^i \bar{\zeta}_l.$$

Es sind also in der Tat $\bar{c}^l_{hi}$ im neuen Koordinatensystem die Komponenten desselben Tensors 3. Stufe, dessen Komponenten im alten $= c^l_{hi}$ sind.

Beispiele für diese Operation der Verjüngung sind uns im vorigen schon in Hülle und Fülle begegnet. Immer wo nach gewissen Indizes summiert wurde, trat in dem allgemeinen Summenglied der Summationsindex doppelt, einmal unten und einmal oben auf; jede solche Summation ist die Ausführung einer Verjüngung. So z. B. in Formel (29): aus v_{ik} und ξ^i kann man durch Multiplikation den Tensor 3. Stufe $v_{ik}\xi^l$ bilden; indem man dann k mit l zusammenfallen läßt und über k summiert, ergibt sich der verjüngte Tensor 1. Stufe u_i. Der Prozeß der Verjüngung kann gleichzeitig für mehrere Indexpaare vorgenommen werden. Aus den Tensoren 1., 2., 3., $\cdots$ Stufe mit den kovarianten Komponenten a_i, a_{ik}, a_{ikl}, $\cdots$ erhält man so insbesondere die Invarianten

$$\sum_i a_i a^i, \qquad \sum_{ik} a_{ik} a^{ik}, \qquad \sum_{ikl} a_{ikl} a^{ikl}, \qquad \ldots.$$

Wenn, wie wir hier annehmen, die dem metrischen Grundtensor en sprechende quadratische Form positiv-definit ist, sind diese Invariante alle positiv; denn in einem Cartesischen Koordinatensystem stellen s sich direkt als die Quadratsummen der Komponenten dar. Die Quadra wurzel aus diesen Invarianten mag, wie im einfachsten Falle des Vektor als der *Betrag* oder die Größe des Tensors 1., 2., 3., ··· Stufe b zeichnet werden.

Wir treffen jetzt und für alle Zukunft die Verabredung: wenn in eine mit Indizes behafteten Formelglied, das die Komponenten eines Tens bedeutet, ein Index doppelt, oben und unten vorkommt, so ist stets g meint, daß über ihn summiert werden soll, ohne daß wir es für nö finden, ausdrücklich ein Summenzeichen davor zu setzen.

Die Operationen der Addition, Multiplikation und Verjüngung setz nur die affine Geometrie voraus; ihnen liegt kein »metrischer Fundament tensor« zugrunde. Dies ist allein für den Prozeß des Übergangs von k varianten zu kontravarianten Komponenten und seine Umkehrung der F

Die Eulerschen Kreiselgleichungen. Zur Einübung der Tensorrechnu wollen wir die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung ei starren Körpers um einen festen Punkt O herleiten. Wir schreiben Grundgleichungen (27) kovariant:

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = 0,$$

multiplizieren sie zur bequemeren Zusammenfassung mit den kon varianten Komponenten w^{ik} eines beliebigen konstanten (von der unabhängigen) schiefsymmetrischen Tensors und verjüngen in bezug i und k. Ist H_{ik} gleich der über alle Massenpunkte zu erstrecken Summe

$$\sum_m m u_i \xi_k$$

gesetzt, so ist

$$\tfrac{1}{2} L_{ik} w^{ik} = H_{ik} w^{ik} = H$$

eine Invariante, und unsere Gleichungen können wir in die Formel einigen:

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{32}$$

Führen wir die Ausdrücke (29) für u_i ein und den Trägheitstens so wird

$$H_{ik} = v_{ir} T^r_k. \tag{33}$$

Bisher haben wir angenommen, daß ein im *Raume* festes Koordin system benutzt wird. Die Trägheitskomponenten T ändern sich dan der Massenverteilung im Laufe der Zeit. Benutzen wir aber statt d jetzt ein im *Körper* festes Koordinatensystem und verstehen unter de herigen Zeichen die Komponenten der betreffenden Tensoren in bezu

dieses Koordinatensystem, kennzeichnen hingegen die Komponenten derselben Tensoren in bezug auf das raumfeste Koordinatensystem durch Überstreichen, so bleibt wegen der Invarianz von H die Gleichung (32) bestehen. Die T_i^k sind nunmehr Konstante; dafür sind aber die w^{ik} mit der Zeit variabel. Unsere Gleichung ergibt

$$(34)\qquad \frac{dH_{ik}}{dt}\cdot w^{ik} + H_{ik}\cdot\frac{dw^{ik}}{dt} = 0.$$

Um $\frac{dw^{ik}}{dt}$ zu bestimmen, wählen wir zwei willkürliche im Körper feste Vektoren, deren kovariante Komponenten im körperfesten Koordinatensystem $= \xi_i$, bezw. η_i sind. Diese Größen sind also Konstante, ihre Komponenten $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$ im raumfesten Koordinatensystem aber Funktionen der Zeit. Es ist

$$w^{ik}\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\bar{\xi}_i\bar{\eta}_k,$$

und daraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$(35)\qquad \frac{dw^{ik}}{dt}\cdot\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\left(\frac{d\bar{\xi}_i}{dt}\cdot\bar{\eta}_k + \bar{\xi}_i\cdot\frac{d\bar{\eta}_k}{dt}\right).$$

Nun ist nach Formel (29) z. B.

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r = \bar{v}_i^{\ r}\bar{\xi}_r.$$

Für die rechte Seite der Gleichung (35) bekommt man so

$$\bar{w}^{ik}(\bar{v}_i^{\ r}\bar{\xi}_r\bar{\eta}_k + \bar{v}_k^{\ r}\bar{\xi}_i\bar{\eta}_r),$$

und da hier eine Invariante steht, können wir die gestrichenen Komponenten wieder durch die ungestrichenen ersetzen:

$$\xi_i\eta_k\frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik}(\xi_r\eta_k v_i^{\ r} + \xi_i\eta_r v_k^{\ r}).$$

Dies gilt identisch in ξ und η; also, wenn H_{ik} beliebige Zahlen sind,

$$H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = w^{ik}(v_i^{\ r}H_{rk} + v_k^{\ r}H_{ir}).$$

Nehmen wir darin für die H_{ik} insbesondere die vorher so bezeichneten Größen, so ist damit das zweite Glied in (34) bestimmt, und unsere Gleichung lautet

$$\left\{\frac{dH_{ik}}{dt} + (v_i^{\ r}H_{rk} + v_k^{\ r}H_{ir})\right\}w^{ik} = 0$$

identisch in dem schiefsymmetrischen Tensor w^{ik}; daher

$$\frac{d(H_{ik}-H_{ki})}{dt} + \left\{\begin{array}{l} v_i^{\ r}H_{rk} + v_k^{\ r}H_{ir} \\ -\,v_k^{\ r}H_{ri} - v_i^{\ r}H_{kr}\end{array}\right\} = 0.$$

Man führe den Ausdruck (33) für H_{ik} ein; da wegen der Symmetrie von T_{ik} auch

$$v_k^r H_{ir} = v_k^r v_i^s T_{rs}$$

symmetrisch ist in i und k, zerstören sich die beiden hinteren Glieder der in der geschweiften Klammer stehenden Summe. Setzt man der symmetrischen Tensor

$$v_i^r v_{kr} = g_{rs} v_i^r v_k^s = vv_{ik},$$

so lauten unsere Gleichungen schließlich

$$\frac{d}{dt}(v_{ir} T_k^r - v_{kr} T_i^r) = (vv_{ir} T_k^r - vv_{kr} T_i^r).$$

Es ist bekanntlich möglich, ein Cartesisches Koordinatensystem, be stehend aus den »Hauptträgheitsachsen«, einzuführen, so daß darin

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 \; (i = k) \\ 0 \; (i \neq k) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_{ik} = 0 \quad (\text{für } i \neq k)$$

ist. Schreiben wir dann T_1 anstelle von T_1^1, analog für die übrige Indizes, so gewinnen in diesem Koordinatensystem unsere Gleichunge die einfache Gestalt

$$(T_i + T_k)\frac{dv_{ik}}{dt} = (T_k - T_i)\, vv_{ik}.$$

Das sind die Differentialgleichungen für die Komponenten v_{ik} der u bekannten Winkelgeschwindigkeit — Gleichungen, die sich bekanntli durch elliptische Funktionen von t lösen lassen. Die hier auftretend Hauptträgheitsmomente T_i hängen mit den sich nach den üblichen Defi tionen ergebenden T_i^* durch die Gleichungen zusammen

$$T_1^* = T_2 + T_3, \qquad T_2^* = T_3 + T_1, \qquad T_3^* = T_1 + T_2.$$

Die von uns gegebene Behandlung des Rotationsproblems läßt s im Gegensatz zu der üblichen Wort für Wort von dem dreidimensiona auf mehrdimensionale Räume übertragen. Das ist ja freilich in pr völlig belanglos. Aber erst die Befreiung von der Beschränkung auf e bestimmte Dimensionszahl, die Formulierung der Naturgesetze in solc Gestalt, daß ihnen gegenüber die Dimensionszahl als etwas *Zufäll* erscheint, bürgt uns dafür, daß ihre mathematische Durchdringung v ständig gelungen ist. —

Das Eindringen in den Tensorkalkül hat — abgesehen von der A vor Indizes, die überwunden werden muß — gewiß seine begrifflic Schwierigkeiten. Formal ist aber die Rechenmethodik von der äußer Einfachheit, viel einfacher z. B. als der Apparat der elementaren Vek rechnung. Zwei Operationen: Multiplikation und Verjüngung: Ne einanderschreiben der Komponenten zweier Tensoren mit lauter schiedenen Indizes — Identifizierung zweier Indizes oben und u dann (stillschweigend) Summation nach ihm. Es ist vielfach vers worden, in unserm Gebiet eine solche invariante, mit den Tensoren s und nicht mit ihren Komponenten arbeitende Bezeichnungsweise zubilden, wie sie in der Vektorrechnung besteht. Was aber dort am P ist, erweist sich für den viel weiter gespannten Rahmen des Tensorka als äußerst unzweckmäßig. Es werden eine solche Fülle von Na

Bezeichnungen und ein solcher Apparat von Rechenregeln nötig (wenn man nicht doch immer wieder auf die Komponenten zurückgreifen will), daß damit ein Gewinn von sehr erheblichem negativen Betrag erreicht wird. Man muß gegen diese Orgien des Formalismus, mit dem man heute sogar die Techniker zu belästigen beginnt, nachdrücklich protestieren.

§ 7. Feinere Systematik der Tensoren.

Aus den Beispielen des vorigen Paragraphen geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß die symmetrischen und die schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe, wo sie in den Anwendungen auftreten, völlig verschiedene Größenarten darstellen. Dies wird uns zum Anlaß, im Gebiet der Tensoren eine feinere sachgemäße Systematik durchzuführen, die so heterogene Dinge nicht mehr in einen Topf wirft.

Ein Tensor 2. Stufe ist allgemein repräsentiert durch eine Bilinearform

$$F(\xi\eta) = \sum_{ik} a_{ik}\xi^i\eta^k$$

zweier willkürlicher Verschiebungen mit den Komponenten ξ^i, η^i. Aus jeder Bilinearform $F(\xi\eta)$ können wir die zugehörige quadratische Form $F(\xi\xi)$ bilden; in dieser Weise geht, wie wir wissen, jede quadratische Form aus *einer und nur einer symmetrischen* Bilinearform hervor. Ein *symmetrischer* Tensor 2. Stufe kann also durch die zugehörige quadratische Form eindeutig dargestellt werden. Indem wir uns von vornherein auf den Standpunkt der metrischen Geometrie stellen und die »oberen« Variablen ξ^i als unabhängige nehmen, werden wir so unter Einschränkung des Namens »Tensor« auf jene Größen, die bisher unter der Bezeichnung »symmetrische Tensoren« auftraten, zu folgender Erklärung geführt.

Unter einem Tensor 1., 2., 3., ... *Stufe verstehen wir eine lineare, quadratische, kubische, ... Form* (homogene Funktion) *einer willkürlichen Verschiebung.*

Stellen wir bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems die willkürliche Verschiebung dar durch ihre Komponenten ξ^i, so erscheint in diesem Koordinatensystem ein Tensor 3. Stufe z. B. als eine kubische Form der n Variablen ξ^i:

$$\sum_{ikl} a_{ikl}\xi^i\xi^k\xi^l;$$

diese Schreibweise wird aber erst dadurch zu einer eindeutig bestimmten, daß wir an die Koeffizienten a_{ikl} die »Symmetrie«-Bedingung stellen: Koeffizienten, welche Indextripeln ikl zugehören, die durch Vertauschung auseinander hervorgehen, sind gleich. Die solchergestalt normierten Koeffizienten bezeichnen wir als die »Komponenten« des durch die kubische Form repräsentierten Tensors. Beim Übergang zu einem neuen, durch Überstreichung gekennzeichneten Koordinatensystem, der sich als eine lineare Transformation der Variablen ξ^i darstellt, gilt

$$(36) \qquad \sum_{ikl} a_{ikl}\xi^i\xi^k\xi^l = \sum_{ikl} \bar{a}_{ikl}\bar{\xi}^i\bar{\xi}^k\bar{\xi}^l,$$

wobei natürlich die Komponenten $\bar{a}_{ikl}$ im neuen Koordinatensystem wie derum der normierenden Bedingung der Symmetrie unterliegen.

Um die Übereinstimmung mit unseren früheren Begriffen zu beweisen müssen wir zeigen: Sind ξ^i, η^i, ζ^i drei Reihen von Variablen, die all der gleichen linearen Transformation unterworfen werden, so ist mit de obigen Bezeichnungen

$$\sum_{ikl} a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l = \sum_{ikl} \bar{a}_{ikl}\bar{\xi}^i\bar{\eta}^k\bar{\zeta}^l. \tag{37}$$

In der Tat: *definieren* wir die Zahlen $\bar{a}_{ikl}$ durch (37) und bezeichnen d links stehende Trilinearform mit $F(\xi\eta\zeta)$, die rechts stehende mit $\bar{F}(\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ so folgt aus der Symmetrie der Koeffizienten a_{ikl} die Symmetrie von d. h. die Tatsache, daß sich die Funktion $F(\xi\eta\zeta)$ bei einer Vertauschu der drei Argumentreihen ξ, η, ζ nicht ändert. Daraus ergibt sich d gleiche Symmetrieeigenschaft für die Funktion $\bar{F}(\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta})$ und daraus wi derum die Symmetrie des Koeffizientensystems $\bar{a}_{ikl}$. Die $\bar{a}_{ikl}$ genüg demnach der Symmetriebedingung und außerdem, wie aus (37) durch Spezialisation $\xi^i = \eta^i = \zeta^i$ hervorgeht, der in ξ identischen Gleichung (3 Das war unsere Behauptung. — Man beachte, daß vom gegenwärtig Standpunkt aus gar kein Grund vorliegt, den Größen, die wir jetzt einem engeren Sinne Tensoren genannt haben, das Beiwort »symmetris zu geben; nicht die Tensoren sind symmetrisch, sondern lediglich in eindeutige Festlegung der Komponenten geht eine normierende Symmet bedingung ein.

Durch die Komponenten ξ^i einer Verschiebung wird die Richt einer Geraden samt Richtungssinn und Größe festgelegt. Sind ξ^i, η^i irg zwei voneinander linear unabhängige Verschiebungen, so wird von ihr wenn man sie von einem beliebigen Punkt O aufträgt, eine Ebene gespannt. Die Größen

$$\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i = \xi^{ik}$$

bestimmen durch ihr Verhältnis in der gleichen Weise die »Stellu dieser Ebene (eine »Flächenrichtung«), wie die ξ^i durch ihr Verhä die Richtung einer Geraden (eine »Linienrichtung«) bestimmen. Die sind dann und nur dann alle $= 0$, wenn die beiden Verschiebu ξ^i, η^i linear abhängig sind und also keine zweidimensionale Man faltigkeit aufspannen. Mit zwei linear unabhängigen Verschiebung und η ist in der aufgespannten Ebene ein Drehungssinn verknüpft: Sinn derjenigen Drehung in der Ebene um O, welche die Richtung v durch einen Winkel $< 180°$ in die Richtung von η überführt; und au dem eine bestimmte Maßzahl (Größe), nämlich der Flächeninhalt von ξ und η aufgespannten Parallelogramms. Trägt man zwei Vers bungen ξ, η von einem beliebigen Punkt O, zwei Verschiebungen ξ_* von einem beliebigen Punkt O_* ab, so sind diese dem einen und andern Paar zugehörigen Dinge: Ebenenstellung, Drehsinn und G

dann und nur dann miteinander identisch, wenn die ξ^{ik} des einen und andern Paares miteinander übereinstimmen:

$$\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i = \xi^i_* \eta^k_* - \xi^k_* \eta^i_* .$$

Wie also die ξ^i die Richtung einer Geraden samt Richtungssinn und Größe bestimmen, so die ξ^{ik} die Stellung einer Ebene samt Umlaufssinn und Größe; man sieht die volle Analogie.

Wie wir vorhin lineare, quadratische, kubische, ... Formen der ξ^i betrachteten, so werden wir jetzt lineare, quadratische, kubische, ... Formen der ξ^{ik} untersuchen; auch diese bezeichnen wir als Tensoren 1., 2., 3., ... Stufe; zur Unterscheidung nennen wir die ersteren aus einem ohne weiteres ersichtlichen Grunde »*Linientensoren*«, die neuen »*Flächentensoren*«. Für die ξ^{ik} gilt die Gleichung

(38) $$\xi^{ki} = -\xi^{ik} .$$

Eine *Linearform* der ξ^{ik} läßt sich auf eine und nur eine Weise folgendermaßen darstellen:

(39) $$\frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}\,\xi^{ik} = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}(\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i),$$

wenn man postuliert, daß die Koeffizienten a_{ik} der Bedingung

(40) $$a_{ki} = -a_{ik}$$

genügen. Die so normierten Koeffizienten bezeichnen wir als die Komponenten des Flächentensors 1. Stufe. Bei dieser Annahme ist (39)

$$= \sum_{ik} a_{ik}\,\xi^i \eta^k .$$

In unserer alten Terminologie haben wir es also mit einem schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe zu tun. Wir sehen, wie dieser bei unserem jetzigen Standpunkt in eine ganz andere Größenkategorie eintritt wie der »symmetrische«.

Bei der Normierung der Koeffizienten einer *quadratischen* Form der Flächenvariablen ξ^{ik}:

(41) $$\frac{1}{4}\sum_{ij,hk} a_{ij,hk}\,\xi^{ij}\,\xi^{hk} = J$$

wird man zunächst dafür Sorge tragen können, daß das Koeffizientensystem symmetrisch ist in den Indexpaaren ij und hk, schiefsymmetrisch in den beiden Indizes i und j, ebenso schiefsymmetrisch in den beiden Indizes h und k:

(42') $$a_{ij,hk} = a_{hk,ij}\,;$$

(42'') $$a_{ji,hk} = -a_{ij,hk}\,, \qquad a_{ij,kh} = -a_{ij,hk}\,.$$

Die Form (41) ist dann

$$= \sum a_{ij,hk}\,\xi^i \eta^j \xi^h \eta^k ,$$

und die Quadrilinearform

$$\sum a_{ij,hk}\, \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^h \xi_4^k = F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

mit der die gegebene durch die Gleichung

$$(43) \qquad J = F(\xi \eta \xi \eta)$$

zusammenhängt, hat die Eigenschaften:

$$(44') \qquad F(\xi_3 \xi_4 \xi_1 \xi_2) = F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4);$$

$$(44'') \qquad F(\xi_2 \xi_1 \xi_3 \xi_4) = F(\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3) = -F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

welche den Koeffizientenrelationen (42′), (42″) entsprechen. Damit die Normierung aber noch nicht abgeschlossen. Bilden wir nämlich du zyklische Vertauschung der letzten drei Argumente und Addition

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3) = S(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4),$$

so wird, wie aus (44″) sofort hervorgeht, $S(\xi \eta \xi \eta) = 0$. Außerd erfüllt S, anstelle von F gesetzt, gleichfalls die Beziehungen (44′), (4 Also kann man F durch Subtraktion irgend eines konstanten Multipl von S noch abändern, ohne daß die Beziehungen (43), (44′), (44″) stört werden. Subtrahiert man insbesondere $\frac{1}{3}S$, so erfüllt das mod zierte F außerdem noch die Gleichung

$$(44''') \qquad F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3) = 0$$

oder ihre Koeffizienten:

$$(42''') \qquad a_{ij,hk} + a_{ih,kj} + a_{ik,jh} = 0.$$

Damit sind wir aber am Ziel; d. h. jeder quadratischen Form J Flächenvariablen entspricht eine und nur eine den sämtlichen Identi (44) genügende Quadrilinearform F, aus der J durch die Substituti

$$(45) \qquad \xi_1 = \xi_3 = \xi, \qquad \xi_2 = \xi_4 = \eta$$

— Gl. (43) — hervorgeht. Um dies zu zeigen, ist lediglich darz daß eine den erwähnten Identitäten genügende Quadrilinearform F tisch verschwindet, wenn $F(\xi \eta \xi \eta) = 0$ ist. Nun ist aber

$$(46) \qquad F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) + F(\xi_1 \xi_4 \xi_3 \xi_2)$$

unter jenen Umständen eine *symmetrische* Bilinearform in ξ_1 un ebenso eine symmetrische Bilinearform in ξ_2 und ξ_4, die verschw wenn $\xi_1 = \xi_3$, $\xi_2 = \xi_4$ genommen wird. Zufolge des Satzes, daß symmetrische Bilinearform, deren zugehörige quadratische Form selber identisch verschwindet, ergibt sich daraus, daß (46) = 0 Benutzen wir noch (44″), so haben wir damit die Gleichung

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3)$$

gewonnen, und durch zyklische Vertauschung von $\xi_2 \xi_3 \xi_4$ infolged auch

$$F(\xi_1 \xi_4 \xi_2 \xi_3) = F(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_2).$$

Die drei Summanden in (44‴) sind somit einander gleich, und Formel liefert das behauptete Resultat $F = 0$. — Unter den Te

im allgemeinen Sinne des § 5 ist also der Flächentensor 2. Stufe als ein Tensor 4. Stufe vertreten, für welchen die ihn darstellende Quadrilinearform den Bedingungen (44) genügt, oder dessen Komponenten $a_{ij,hk}$ die gegenüber linearen Transformationen invarianten Gleichungen (42) erfüllen.

Berücksichtigt man die Beziehungen (44'), (44''), so ist in der Gleichung (44''') der Index 1 nur scheinbar ausgezeichnet. Anderseits kann bewiesen werden — und wir haben später von dieser Bemerkung[5] Gebrauch zu machen —, daß die Relationen (44''), (44''') als normierende bereits genügen, da (44') eine Folge aus ihnen ist. Wird (44') nicht vorausgesetzt, so gehen dadurch, daß wir der Reihe nach den Indizes 2, 3, 4 die besondere Rolle zuweisen, welche alsdann der Index 1 in der Gleichung (44''') spielt, aus ihr noch drei weitere hervor. Indem man alle vier Gleichungen addiert und von (44'') durchgängigen Gebrauch macht, kommt

$$2\left[F(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4) - F(\xi_3\,\xi_4\,\xi_1\,\xi_2)\right] = 0\,.$$

Ist Q, wie früher, die metrische Fundamentalform, so ist das einfachste Beispiel einer den Bedingungen (44) genügenden Quadrilinearform

$$\begin{vmatrix} Q(\xi_1\,\xi_3) & Q(\xi_1\,\xi_4) \\ Q(\xi_2\,\xi_3) & Q(\xi_2\,\xi_4) \end{vmatrix}.$$

Die aus ihr durch die Substitution (45) hervorgehende quadratische Form der Flächenvariablen $\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$:

$$J = Q(\xi)\cdot Q(\eta) - Q^2(\xi\eta)$$

bedeutet nach den Lehren der analytischen Geometrie nichts anderes als den ins Quadrat erhobenen Flächeninhalt des von den Vektoren ξ und η aufgespannten Parallelogramms. Die Wurzel aus J ist also jene »Größe«, die nach unsern obigen Ausführungen neben einer Ebenenstellung mit Umlaufssinn durch die ξ^{ik} festgelegt wird. Es ist

$$\begin{aligned} J &= \xi^i\xi_i\cdot\eta^k\eta_k - \xi_i\eta^i\cdot\xi^k\eta_k \\ &= (\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i)\,\xi_i\eta_k = \tfrac{1}{2}(\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i)(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i) \qquad (47)\\ &= \tfrac{1}{2}\xi^{ik}\xi_{ik}\,. \end{aligned}$$

Auf eine genauere Diskussion der Flächentensoren 3. und höherer Stufe können wir verzichten, da solche in den Anwendungen des Tensorkalküls, die wir zu machen haben, nirgendwo auftreten.

Im n-dimensionalen Raum gibt es genau n linear unabhängige Linientensoren 1. Stufe (Vektoren), aus denen sich alle andern zusammensetzen lassen, $\frac{n(n+1)}{2}$ derartige Linientensoren 2. Stufe und $\frac{n(n-1)}{2}$ linear unabhängige Flächentensoren 1. Stufe. Die Maximalzahl der unabhängigen Flächentensoren 2. Stufe berechnet sich, wie wir hier ohne Beweis erwähnen, zu

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}\,.$$

Nach den Linien- und Flächentensoren gehen wir jetzt zu den »*Raumtensoren*« über. Das sind lineare, quadratische, kubische, ... homogene Formen der »Raumvariablen«

$$\xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix},$$

die aus drei willkürlichen Verschiebungen ξ, η, ζ gebildet sind. Die ξ^{ikl} haben die Eigenschaft, bei einer geraden Vertauschung der Indizes in sich überzugehen, bei einer ungeraden in ihr Negatives $-\xi^{ikl}$ umzuschlagen. Eine Linearform der ξ^{ikl} läßt sich in einer und nur einer Weise so darstellen

$$\frac{1}{3!}\sum_{ikl} a_{ikl}\,\xi^{ikl},$$

daß die Koeffizienten diesen selben Bedingungen genügen; die so nor mierten Koeffizienten werden als die Komponenten des betr. Raumtenso 1. Stufe zu bezeichnen sein. Es gibt im ganzen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ line unabhängige Raumtensoren 1. Stufe; im Falle $n = 3$ nur einen einzig In der Tat ist dann a_{123} die einzige unabhängige Komponente, die and bestimmen sich aus

$$a_{123} = a_{231} = a_{312} = -a_{213} = -a_{321} = -a_{132}.$$

Der Invariante (47) entspricht hier

$$\frac{1}{3!}\sum_{ikl}\xi_{ikl}\,\xi^{ikl}\,; \tag{48}$$

diese Zahl werden wir als das Quadrat des Volumens des von den Verschiebungen ξ, η, ζ aufgespannten Parallelepipeds zu bezeichnen h Im Falle des dreidimensionalen Raums ist sie offenbar

$$= \xi_{123}\,\xi^{123} = g_{1i}\,g_{2k}\,g_{3l}\,\xi^{ikl}\,\xi^{123},$$

und da $\xi^{ikl} = \pm\,\xi^{123}$ ist, je nachdem ikl eine gerade oder un Vertauschung von 123 ist, so bekommt sie den Wert

$$g \cdot (\xi^{123})^2,$$

wo g die Determinante der Koeffizienten g_{ik} der metrischen Funda form ist. Das Volumen des Parallelepipeds wird somit

$$= \sqrt{g}\cdot \text{abs.}\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}.$$

Das befindet sich in Übereinstimmung mit elementaren Form analytischen Geometrie.

Im dreidimensionalen Raum ist unsere Systematik mit den Raumtensoren beendet, im vier- oder mehrdimensionalen Raum aber setzt sie sich entsprechend fort.

Damit sind wir zu einer wahrhaft der Sache gemäßen Übersicht und Einteilung der in der räumlichen Wirklichkeit eine Rolle spielenden Größenarten gelangt. Es kann aus guten inneren Gründen behauptet werden, und wir werden es in der Folge durchweg bestätigt finden, daß nur solche Größen eine reale Bedeutung haben, die in diesem natürlichen System ihren Platz finden. Man beachte, daß unsere jetzige Klassifikation bei weitem nicht alle jene Größen umfaßt, die wir in den beiden vorigen Paragraphen als Tensoren bezeichnet haben; z. B. sind von den Tensoren 2. Stufe in jenem weiteren Sinne hier nur die symmetrischen (als Linientensoren 2. Stufe) und die schiefsymmetrischen (als Flächentensoren 1. Stufe) vertreten. Für die Algebra werden wir nach wie vor jenen allgemeineren Tensorbegriff benutzen, da auf ihm die große Einfachheit des Kalküls beruht; das hat dann zur Folge, daß in den Zwischenrechnungen auch die Komponenten solcher Tensoren auftreten, die in unserm natürlichen System keine Stelle haben.

Als einfachste Beispiele der algebraischen Erzeugung von Tensoren aus Tensoren in unserm jetzigen engeren Sinne seien diese angeführt: 1) Sind a_i, b_i die kovarianten Komponenten zweier Linientensoren 1. Stufe, so sind

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe, der durch dieses Bildungsgesetz mit den beiden gegebenen Linientensoren in einen vom benutzten Koordinatensystem unabhängigen Zusammenhang gebracht ist (sog. »vektorielles«, richtiger »flächentensorielles« Produkt). 2) Sind a_i die kovarianten Komponenten eines Linientensors 1. Stufe, b_{ik} die eines Flächentensors 1. Stufe, so bilden wir

$$(49) \qquad a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}.$$

Jedes einzelne Glied der links stehenden dreigliedrigen Summe ist die kovariante $(ikl)^{\text{te}}$ Komponente eines aus a und b invariant entstehenden Tensors 3. Stufe im weiteren Sinne. Die c_{ikl} haben aber dazu die Eigenschaft, bei gerader Vertauschung der ikl in sich überzugehen, bei ungerader Vertauschung in ihr Negatives umzuschlagen. Folglich sind sie die kovarianten Komponenten eines Raumtensors 1. Stufe, der durch die Formeln (49) in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Linien- und Flächentensor 1. Stufe a und b abgeleitet ist. —

Zur Ausbildung der Tensorrechnung leistet dieser Paragraph keinen Beitrag; wem also nur an der Beherrschung des formalen Kalküls gelegen ist, kann ganz von ihm absehen. Für das Verständnis des Wesens der in Geometrie und Physik eine Rolle spielenden Größen scheint mir aber sein Inhalt von Wichtigkeit zu sein.

§ 8. Tensoranalysis. Spannungen.

Größen, die den von Ort zu Ort wechselnden Zustand eines räumlic ausgebreiteten physikalischen Systems beschreiben, haben nicht einen We schlechthin, sondern nur »in jedem Punkte«; sie sind, mathematisch au gedrückt, »Funktionen des Orts«. Je nachdem es sich um einen Skala Vektor oder Tensor handelt, sprechen wir von einem skalaren, Vekto oder Tensor-*Feld*. Ein solches ist also gegeben, wenn jedem Punkte d Raumes oder eines bestimmten Raumgebietes ein Skalar, Vektor o Tensor der betr. Art zugeordnet ist. Benutzen wir ein bestimmtes K ordinatensystem, so erscheinen dann der Wert der skalaren Größe, be die Werte der Komponenten der vektoriellen oder tensoriellen Gr in diesem Koordinatensystem als Funktionen der Koordinaten eines dem betreffenden Gebiete variablen Raumpunktes.

Die Tensoranalysis lehrt, wie durch Differentiation nach den Ra koordinaten aus einem Tensorfeld ein neues in einer vom Koordina system unabhängigen Weise hergeleitet werden kann. Sie ist wie Tensoralgebra von äußerster Einfachheit: sie kennt nur eine Opera die *Differentiation*.

Bedeuten x_i die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in e affinen Koordinatensystem, $\bar{x}_i$ die Koordinaten desselben Punktes in e andern solchen System, so besteht zwischen den x_i und $\bar{x}_i$ ein g mäßiger Zusammenhang, der sich durch die linearen Transformationsfo

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \bar{x}_k + \alpha_i$$

mit konstanten Koeffizienten ausdrückt. Die Komponenten ξ^i ei liebigen Verschiebung erfahren bei diesem Übergang diejenige ho Transformation, welche aus der inhomogenen durch Fortlassen d stanten α_i entsteht. Ist

$$\varphi = f(x_1\, x_2 \cdots x_n) = f(x)$$

ein gegebenes Skalarfeld, so ist die einer infinitesimalen Verrück Argumentpunktes, bei welcher dessen Koordinaten x_i die Ände erfahren, entsprechende Änderung von φ gegeben durch das tota rential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Der Sinn dieser Formel ist der, daß, wenn Δx_i zunächst die nenten einer endlichen Verrückung sind und Δf die zugehörige von f, der Unterschied zwischen

$$\Delta f \text{ und } \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

mit den Verrückungskomponenten nicht nur absolut zu o herabsin

relativ zu der Größe der Verrückung, die etwa durch $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|$ gemessen werde. Daraus geht hervor, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

die kovarianten Komponenten eines Vektors sind, der aus dem Skalarfeld φ in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt. In der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er als *Gradient* auf und wird durch das Symbol grad φ bezeichnet.

Diese Operation läßt sich sofort von einem skalaren auf ein beliebiges Tensorfeld übertragen. Seien z. B. $f_{ik}^h(x)$ die in bezug auf i, k kovarianten, inbezug auf h kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe (in dem weiten Sinne des § 5), dann ist

$$f_{ik}^h \xi_h \eta^i \zeta^k$$

eine Invariante, wenn wir unter den ξ_h ein willkürliches, aber *konstantes, d. h. vom Ort unabhängiges* Wertsystem der unteren, unter η^i, ζ^i ebensolche Wertsysteme der oberen Variablen verstehen. Die einer infinitesimalen Verrückung mit den Komponenten dx_i entsprechende Änderung dieser Invariante ist gegeben durch

$$\frac{\partial f_{ik}^h}{\partial x_l} \xi_h \eta^i \zeta^k dx_l,$$

und folglich sind

$$f_{ikl}^h = \frac{\partial f_{ik}^h}{\partial x_l}$$

die Komponenten eines Tensorfeldes 4. Stufe, das in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem gegebenen entspringt. *Das ist der Prozess der Differentiation*; durch ihn wird, wie man sieht, die Stufenzahl des Tensors um 1 erhöht. Es ist noch zu bemerken: wegen der Unabhängigkeit des metrischen Fundamentaltensors vom Ort erhält man z. B. die in bezug auf den Index k kontravarianten Komponenten des eben gebildeten Tensors, indem man unter dem Differentiationszeichen den Index k nach oben schafft: $\dfrac{\partial f_i^{hk}}{\partial x_l}$; die Verwandlung von kovariant in kontravariant und die Differentiation sind vertauschbar. Die Differentiation kann rein formal so ausgeführt werden, als ob der betr. Tensor mit einem Vektor multipliziert würde, dessen kovariante Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{50}$$

sind; dabei wird der Differentialquotient $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ als symbolisches Produkt von f mit $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ behandelt. Den symbolischen Vektor (50) findet man in der Literatur öfter mit dem geheimnisvollen Namen »Nabla-Vektor« belegt.

Beispiele. Aus dem Vektor mit den kovarianten Komponenten u_i entspringt der Tensor 2. Stufe $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$. Daraus bilden wir insbesondere

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \tag{51}$$

Während in dem natürlichen System des vorigen Paragraphen dem Tensor u_{ik} keine Bedeutung zukommt, sind diese Größen die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe; in der gewöhnlichen Vektorrechnung tritt er (mit entgegengesetztem Vorzeichen) als *Rotation* (rot oder curl) auf. Hingegen sind die Größen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

die kovarianten Komponenten eines Linientensors 2. Stufe. Bedeutet der Vektor u die Geschwindigkeit kontinuierlich ausgebreiteter, sich bewegender Materie als Funktion des Orts, so gibt das Verschwinden dieses Tensors an einer Stelle kund, daß die unmittelbare Umgebung der Stelle sich wie ein starrer Körper bewegt; er verdient daher, als »*Verzerrungs-Tensor*« bezeichnet zu werden. Endlich aber entsteht aus u_{ik} durch Verjüngung der Skalar

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_i},$$

in der Vektorrechnung als *Divergenz* (div) bekannt.

Aus einem Tensor 2. Stufe mit den gemischten Komponenten S_i^k entspringt durch Differentiation und Verjüngung der Vektor

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}.$$

Sind v_{ik} die kovarianten Komponenten eines Flächentensorfeldes 1. Stufe, so entsteht entsprechend der Formel (49), in der wir b durch v und a durch den symbolischen Vektor »Differentiation« ersetzen, aus ihm der Raumtensor 1. Stufe mit den Komponenten

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l}. \tag{52}$$

Der Flächentensor (51), rot, verschwindet, wenn u_i Gradient eines Skalarfeldes ist; der Raumtensor (52) verschwindet, wenn v_{ik} die rot eines Vektors u_i ist.

Spannungen. Ein wichtiges Beispiel für ein Tensorfeld bilden die Spannungen in einem elastischen Körper; von diesem Beispiel her haben die Tensoren ihren Namen erhalten. In einem elastischen Körper, an dessen Oberfläche Zug- oder Druckkräfte angreifen, auf dessen Inneres außerdem irgendwelche an den einzelnen Teilen der Materie angreifende »Volumkräfte« (z. B. die Schwerkraft) wirken, stellt sich ein Gleichgewichtszustand her, in dem die durch die Verzerrung beanspruchten

Kohäsionskräfte der Materie jenen eingeprägten Kräften das Gleichgewicht halten. Schneiden wir ein beliebiges Stück J der Materie in Gedanken aus dem Körper heraus, lassen es erstarren und entfernen die übrige Materie, so werden die eingeprägten Volumkräfte für sich an diesem Stück der Materie sich nicht das Gleichgewicht halten; sie sind aber ins Gleichgewicht gesetzt durch die auf die Oberfläche Ω des Stückes J wirkenden Druckkräfte, die von dem weggeschnittenen Teil der Materie auf J ausgeübt werden. In der Tat haben wir uns, wenn wir auf die atomistische Feinstruktur der Materie nicht eingehen, vorzustellen, daß die Kohäsionskräfte nur in der unmittelbaren Berührung wirksam sind, so daß also die Einwirkung des weggeschnittenen Materieteils auf J durch solche oberflächlichen Druckkräfte muß ersetzt werden können; und zwar darf, wenn $\mathfrak{S}\,do$ die auf ein Oberflächenelement do wirkende Druckkraft ist, $\mathfrak{S}$ also den Druck pro Flächeneinheit bedeutet, $\mathfrak{S}$ nur abhängen von der Stelle, an der sich das Flächenelement do befindet und von der ins Innere von J gerichteten Normalen n dieses Flächenelements (welche die »Stellung« von do charakterisiert). Für $\mathfrak{S}$ schreiben wir, um die letztere Abhängigkeit auszudrücken, $\mathfrak{S}_n$. Bedeutet $-n$ die der Normale n entgegengesetzte Normalenrichtung, so folgt aus dem Gleichgewicht für eine kleine, unendlich dünne Scheibe, daß

$$\mathfrak{S}_{-n} = -\mathfrak{S}_n \tag{53}$$

sein muß.

Wir benutzen Cartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3. Die Druckkräfte pro Flächeneinheit an einer Stelle, welche gegen ein Flächenelement daselbst wirken, dessen innere Normale in die Richtung der positiven x_1, bzw. x_2, bzw. x_3-Achse fällt, mögen mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ bezeichnet werden. Wir wählen irgend drei positive Zahlen a_1, a_2, a_3 von der Quadratsumme 1 und eine positive Zahl ε, die gegen 0 konvergieren soll (während die a_i festbleiben). Wir tragen vom betrachteten Punkt O aus in Richtung der positiven Koordinatenachsen die Strecken

$$OP_1 = \varepsilon a_1, \quad OP_2 = \varepsilon a_2, \quad OP_3 = \varepsilon a_3$$

ab und betrachten das infinitesimale Tetraeder $OP_1P_2P_3$ mit den »Wänden« OP_2P_3, OP_3P_1, OP_1P_2 und dem »Dach« $P_1P_2P_3$. Ist f der Flächeninhalt des Daches und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Richtungskosinusse seiner inneren Normalen n, so sind die Flächeninhalte der Wände

$$-f\cdot\alpha_1 \; (= \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 a_3), \quad -f\cdot\alpha_2, \quad -f\cdot\alpha_3 .$$

Der Druck auf die Wände und das Dach beträgt also insgesamt bei unendlich kleinem ε:

$$f\{\mathfrak{S}_n - (\alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3)\}.$$

f ist von der Größenordnung ε^2; die auf das Tetraedervolumen wirkende Volumkraft ist aber nur von der Größenordnung ε^3. Daher muß zufolge der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{S}_n = \alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3$$

sein. Mit Hilfe von (53) überträgt sich diese Formel unmittelbar auf den Fall, daß das Tetraeder in einem der übrigen 7 Oktanten gelegen ist. Nennen wir die Komponenten von $\mathfrak{S}_i$ in bezug auf die Koordinatenachsen S_{i1}, S_{i2}, S_{i3} und sind ξ^i, η^i die Komponenten zweier beliebiger Verschiebungen von der Länge 1, so ist

$$(54) \qquad \sum_{ik} S_{ik} \xi^i \eta^k$$

die in die Richtung von η fallende Komponente derjenigen Druckkraft, die gegen ein Flächenelement mit der inneren Normale ξ stattfindet. Die Bilinearform (54) hat also eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, und S_{ik} sind die Komponenten eines Tensorfeldes »Spannung«. Wir operieren hier auch weiter mit rechtwinkligen Koordinatensystemen, so daß wir zwischen kovariant und kontravariant nicht zu unterscheiden brauchen.

Wir bilden den Vektor $\mathfrak{S}'_i$ mit den Komponenten S_{1i}, S_{2i}, S_{3i}. Die in die Richtung der inneren Normale n eines Flächenelements fallende Komponente von $\mathfrak{S}'_1$ ist dann gleich der x_1-Komponente von $\mathfrak{S}_n$. Die x_1-Komponente der Gesamt-Druckkraft, die auf der Oberfläche Ω des herausgeschnittenen Materiestücks J liegt, ist daher gleich dem Oberflächenintegral der normalen Komponente von $\mathfrak{S}'_1$, und das ist nach dem Gaußschen Satz gleich dem Volumintegral

$$-\int_J \operatorname{div} \mathfrak{S}'_1 \cdot dV;$$

das gleiche gilt für die x_2- und x_3-Komponente. Wir haben also den Vektor $\mathfrak{p}$ mit den Komponenten

$$p_i = -\sum_k \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}$$

zu bilden (das ist, wie wir wissen, ein invariantes Bildungsgesetz); einer Volumkraft von der Richtung und Stärke $\mathfrak{p}$ pro Volumeinheit sind die Druckkräfte $\mathfrak{S}$ in dem Sinne äquivalent, daß für jedes herausgegriffene Stück Materie J

$$(55) \qquad \int_\Omega \mathfrak{S}_n \, do = \int_J \mathfrak{p} \, dV$$

ist. Ist $\mathfrak{k}$ die eingeprägte Kraft pro Volumeinheit, so lautet die erste Gleichgewichtsbedingung für das erstarrt gedachte Materiestück

$$\int_J (\mathfrak{p} + \mathfrak{k}) \, dV = 0,$$

und da dies für jeden Teil J zutreffen muß:

$$(56) \qquad \mathfrak{p} + \mathfrak{k} = 0.$$

Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt O und bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor $\overrightarrow{OP}$ nach dem Argumentpunkt P, die eckige Klammer das

»vektorielle« Produkt, so lautet die zweite Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung:

$$\int_{\Omega} [\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]\, do + \int_{\mathfrak{J}} [\mathfrak{r}, \mathfrak{k}]\, dV = 0,$$

und da allgemein (56) gilt, muß also außer (55) auch noch

$$\int_{\Omega} [\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]\, do = \int_{\mathfrak{J}} [\mathfrak{r}, \mathfrak{p}]\, dV$$

sein. Die x_1-Komponente von $[\mathfrak{r}, \mathfrak{S}_n]$ ist gleich der in der Richtung n genommenen Komponente von $x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2$; daher ist nach dem Gaußschen Satz die x_1-Komponente der linken Seite

$$= -\int_{\mathfrak{J}} \operatorname{div} (x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2)\, dV,$$

und es kommt die Gleichung

$$\operatorname{div} (x_2 \mathfrak{S}'_3 - x_3 \mathfrak{S}'_2) = -(x_2 p_3 - x_3 p_2).$$

Die linke Seite ist aber

$$= (x_2 \operatorname{div} \mathfrak{S}'_3 - x_3 \operatorname{div} \mathfrak{S}'_2) + (\mathfrak{S}'_3 \cdot \operatorname{grad} x_2 - \mathfrak{S}'_2 \cdot \operatorname{grad} x_3)$$
$$= -(x_2 p_3 - x_3 p_2) + (S_{23} - S_{32}).$$

Demnach ergibt diese Gleichgewichtsbedingung, wenn wir außer der x_1- noch die x_2- und x_3-Komponente bilden:

$$S_{23} = S_{32}, \quad S_{31} = S_{13}, \quad S_{12} = S_{21},$$

d. h. die Symmetrie des *Spannungstensors* S. Derselbe *ist demnach ein Linientensor* 2. *Stufe*. Für eine beliebige Verschiebung mit den Komponenten ξ^i ist

$$\frac{\sum S_{ik}\, \xi^i \xi^k}{\sum g_{ik}\, \xi^i \xi^k}$$

die in die Richtung von ξ fallende Komponente der Druckkraft pro Flächeneinheit, welche gegen ein senkrecht zu dieser Richtung gestelltes Flächenelement wirkt. (Hier darf nun wieder ein beliebiges affines Koordinatensystem benutzt werden.) *Die Spannungen sind einer Volumkraft vollständig äquivalent, deren Dichte p sich nach den invarianten Formeln*

(57) $$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}$$

berechnet. — Im Falle eines allseitig gleichen Drucks p ist

$$S_{ik} = p \cdot g_{ik}, \quad p_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Durch das Vorige hat nur der Begriff der Spannung seine exakte Formulierung und mathematische Darstellung gefunden. Zur Aufstellung der Grundgesetze der Elastizitätstheorie ist es weiterhin erforderlich, die Abhängigkeit der Spannung von der durch die eingeprägten Kräfte bewirkten Verzerrung der Materie zu ermitteln. Wir haben keinen Anlaß, hier darauf näher einzugehen.

§ 9. Das stationäre elektromagnetische Feld.

Wo bisher von mechanischen oder physikalischen Dingen die Rede war, geschah es zunächst zu dem Zweck, zu zeigen, worin sich deren räumliche Natur kundgibt: nämlich darin, daß sich ihre Gesetze als invariante Tensorrelationen ausdrücken. Wir hatten dadurch aber zugleich Gelegenheit, die Bedeutung der Tensorrechnung an konkreten Beispielen klar zu machen und spätere Auseinandersetzungen vorzubereiten, die sich gründlicher mit physikalischen Theorien — um ihrer selbst willen und wegen ihrer Bedeutung für das Zeitproblem — befassen werden. In dieser Hinsicht wird nun namentlich die *Theorie des elektromagnetischen Feldes,* das vollkommenste Stück Physik, das wir heute kennen, von größter Wichtigkeit werden. Hier betrachten wir sie nur insofern, als die Zeit noch nicht in Frage kommt, d. h. wir beschränken uns auf zeitlich unveränderliche stationäre Verhältnisse.

Das *Coulombsche Gesetz* der Elektrostatik läßt sich folgendermaßen aussprechen: Sind im Raum irgendwelche Ladungen mit der Dichte ϱ verteilt, so üben sie auf eine Punktladung e die Kraft

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E} \tag{58}$$

aus, worin

$$\mathfrak{E} = -\int \frac{\varrho \cdot \mathfrak{r}}{4\pi r^3} dV. \tag{59}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{r}$ den Vektor $\overrightarrow{OP}$, der vom »Aufpunkt« O, in welchem $\mathfrak{E}$ bestimmt werden soll, zum Argument- oder »Quell«-Punkt P führt, nach dem integriert wird; r seine Länge; dV das Volumelement. Die Kraft setzt sich also aus zwei Faktoren zusammen, der Ladung e des kleinen Probekörpers, die nur von dessen Zustand abhängt, und der »Feldstärke« $\mathfrak{E}$, welche im Gegenteil allein durch die gegebene Ladungsverteilung im Raum bestimmt ist. Wir machen uns die Vorstellung, daß auch dann, wenn wir an keinem Probekörper die Kraft $\mathfrak{K}$ beobachten, durch die im Raume verteilten Ladungen ein »elektrisches Feld« hervorgerufen wird, das durch den Vektor $\mathfrak{E}$ beschrieben ist; an einer hereingebrachten Punktladung e gibt es sich durch die Kraft (58) kund. $\mathfrak{E}$ können wir aus einem Potential*) $-\varphi$ ableiten nach der Formel

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad -4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r} dV. \tag{60}$$

Daraus folgt, 1) daß $\mathfrak{E}$ wirbelfrei ist, und 2) daß der Fluß von $\mathfrak{E}$ durch irgend eine geschlossene Oberfläche gleich den von dieser Oberfläche umschlossenen Ladungen ist, oder daß die Elektrizität Quelle des elektrischen Feldes ist; in Formeln

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho. \tag{61}$$

*) Um späterer Zwecke willen (§ 25) muß ich hier die übliche Bezeichnung φ des Potentials in $-\varphi$ abändern.

Aus diesen einfachen Differentialgesetzen geht rückwärts wieder das Coulombsche Gesetz hervor unter Hinzunahme der Bedingung, daß das Feld $\mathfrak{E}$ im Unendlichen verschwindet. Machen wir nämlich zufolge der ersten dieser Gleichungen (61) den Ansatz $\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi$, so ergibt sich aus der zweiten zur Bestimmung von φ die Poissonsche Gleichung $\Delta\varphi = \varrho$, deren Lösung durch (60) geliefert wird.

Das Coulombsche Gesetz ist ein *Fernwirkungsgesetz:* in ihm erscheint die Feldstärke an einer Stelle abhängig von den Ladungen an allen andern Stellen, den nächsten und fernsten, im Raum. Im Gegensatz dazu drücken die viel einfacheren Formeln (61) *Nahewirkungsgesetze* aus: da zur Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle die Kenntnis ihres Wertverlaufs in einer beliebig kleinen Umgebung dieser Stelle genügt, sind durch (61) die Werte von ϱ und $\mathfrak{E}$ an einer Stelle und deren unmittelbarer Umgebung miteinander in Zusammenhang gebracht. Diese Nahewirkungsgesetze fassen wir als den wahren Ausdruck des in der Natur bestehenden Wirkungszusammenhanges auf, (59) aber nur als eine daraus sich ergebende mathematische Konsequenz; auf Grund der Gesetze (61), die eine so einfache anschauliche Bedeutung haben, glauben wir zu *verstehen,* woher das Coulombsche Gesetz kommt. Gewiß folgen wir hier vor allem einem erkenntnistheoretischen Zwang; schon Leibniz hat die Forderung der Kontinuität, der Nahewirkung als ein allgemeines Prinzip formuliert und sich aus diesem Grunde mit dem Newtonschen Fernwirkungsgesetz der Gravitation, das ja dem Coulombschen völlig entspricht, nicht befreunden können. Daneben kommt aber die mathematische Durchsichtigkeit und der einfache anschauliche Sinn der Gesetze (61) in Betracht; immer wieder machen wir in der Physik die Erfahrung, daß, wenn wir erst einmal dazu gelangt sind, die Gesetzmäßigkeit eines bestimmten Erscheinungsgebietes völlig zu durchdringen, sie sich in Formeln von vollendeter mathematischer Harmonie ausspricht. Schließlich legt, was das Physikalische betrifft, die Maxwellsche Theorie in ihrer Weiterentwicklung beständig Zeugnis davon ab, von wie ungeheurer Fruchtbarkeit der Schritt von der alten Fernwirkungsvorstellung zu der modernen der Nahewirkung war.

Das Feld übt auf die Ladungen, welche es erzeugen, eine Kraft aus, deren Dichte pro Volumeinheit durch die Formel

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{E} \tag{62}$$

gegeben ist: so werden wir die Gleichung (58) in strenger Weise zu deuten haben. Bringen wir einen geladenen Probekörper in das Feld hinein, so gehört auch seine Ladung mit zu den felderzeugenden Ladungen, und die Formel (58) wird nur dann zur richtigen Bestimmung des vor dem Hineinbringen des Probekörpers herrschenden Feldes $\mathfrak{E}$ dienen können, wenn die Probeladung e so schwach ist, daß sie das Feld nur unmerklich verändert. Es ist das eine Schwierigkeit, die sich durch die ganze experimentelle Physik hindurchzieht: daß wir durch das Herein-

bringen des Meßinstruments die ursprünglichen Verhältnisse, welche gemessen werden sollen, stören; daher stammen zum guten Teil die Fehlerquellen, auf deren Elimination der Experimentator so viel Scharfsinn verwenden muß.

Das Grundgesetz der Mechanik: *Masse* $\times$ *Beschleunigung* = *Kraft* lehrt, was für eine Bewegung der Massen unter dem Einfluß gegebener Kräfte (bei gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten) eintritt. Was aber *Kraft* ist, lehrt die Mechanik nicht; das erfahren wir in der Physik. *Das Grundgesetz der Mechanik ist ein offenes Schema, das einen konkreten Inhalt erst gewinnt, wenn der in ihm auftretende Kraftbegriff durch die Physik ausgefüllt wird.* Die unglücklichen Versuche, die Mechanik als eine abgeschlossene Disziplin für sich zu entwickeln, haben sich daher auch niemals anders zu helfen gewußt als dadurch, daß sie das Grundgesetz zu einer Worterklärung machten: Kraft *bedeutet* Masse $\times$ Beschleunigung. Hier in der Elektrostatik erkennen wir aber für ein besonderes physikalisches Erscheinungsgebiet, was Kraft ist und wie sie sich gesetzmäßig durch (62) aus den *Zustandsgrößen* Ladung und Feld bestimmt. Sehen wir die Ladungen als gegeben an, so liefern die Feldgleichungen (61) den Zusammenhang, durch welchen die Ladungen das von ihnen erzeugte Feld determinieren. Was aber die Ladungen betrifft, so weiß man, daß sie an die Materie gebunden sind. Die moderne Elektronentheorie zeigte, daß das in einem ganz strengen Sinne verstanden werden kann: die Materie besteht aus Elementarquanten, den Elektronen, die eine völlig bestimmte unveränderliche Masse und dazu eine völlig bestimmte unveränderliche Ladung besitzen. Wo immer wir das Auftreten neuer Ladungen beobachten, beruht dies lediglich darauf, daß positive und negative Elementarladungen, die vorher so nahe beieinander waren, daß sie sich in ihrer Fernwirkung vollständig kompensierten, auseinandertreten; es »entsteht« daher bei solchen Prozessen auch immer gleichviel positive und negative Elektrizität. Damit schließen sich die Gesetze zu einem Zykel: die Verteilung der mit ein für allemal festen Ladungen versehenen Elementarquanten der Materie und (wie man bei nicht-stationären Verhältnissen hinzufügen muß) ihre Geschwindigkeiten bestimmen das Feld; das Feld übt auf die geladene Materie eine durch (62) gegebene ponderomotorische Kraft aus; die Kraft bestimmt nach dem Fundamentalgesetz der Mechanik die Beschleunigung und damit die Verteilung und Geschwindigkeit der Materie im nächsten Moment. *Erst dieser ganze theoretische Zusammenhang ist einer experimentellen Nachprüfung fähig* — wenn wir annehmen, daß die Bewegung der Materie das ist, was wir direkt beobachten können (was übrigens auch nur bedingt zugegeben werden kann); nicht aber ein einzelnes, aus diesem theoretischen Gefüge herausgerissenes Gesetz! Der Zusammenhang zwischen der unmittelbaren Erfahrung und dem, was die Vernunft begrifflich als das hinter ihr steckende Objektive in einer Theorie zu erfassen sucht, ist nicht so einfach, daß jede einzelne Aussage der Theorie für sich einen unmittelbar

in der Anschauung zu verifizierenden Sinn besäße. Wir werden im folgenden immer deutlicher sehen, daß Geometrie, Mechanik und Physik in dieser Weise eine unlösbare theoretische Einheit bilden, etwas, das man immer *als Ganzes* vor Augen haben muß, wenn man danach fragt, ob jene Wissenschaften die in allem subjektiven Bewußtseins-Erleben sich bekundende, dem Bewußtsein transzendente Wirklichkeit vernünftig deuten: die Wahrheit bildet ein *System*. — Im übrigen ist das hier in seinen ersten Zügen geschilderte physikalische Weltbild charakterisiert durch den Dualismus von *Materie* und *Feld*, die sich in gegenseitiger Wechselwirkung befinden; erst durch die Relativitätstheorie ist dieser Dualismus, und zwar zugunsten einer reinen Feldphysik, überwunden worden (vgl. § 24).

Die ponderomotorische Kraft im elektrischen Feld ist schon von Faraday auf *Spannungen* zurückgeführt worden. Benutzen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x_1, x_2, x_3, in welchem E_1, E_2, E_3 die Komponenten der elektrischen Feldstärke sind, so ist die x_i-Komponente der Kraftdichte

$$p_i = \varrho E_i = E_i \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right).$$

Durch eine einfache, die Wirbellosigkeit von $\mathfrak{E}$ berücksichtigende Umrechnung findet man daraus, daß die Komponenten p_i der Kraftdichte sich nach den Formeln (57) aus einem Spannungstensor ableiten, dessen Komponenten S_{ik} in dem folgenden quadratischen Schema zusammengestellt sind:

$$(63) \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(E_2^2 + E_3^2 - E_1^2), & -E_1 E_2, & -E_1 E_3 \\ -E_2 E_1, & \frac{1}{2}(E_3^2 + E_1^2 - E_2^2), & -E_2 E_3 \\ -E_3 E_1, & -E_3 E_2, & \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) \end{array} \right| .$$

Wir sehen, daß die Symmetriebedingung $S_{ki} = S_{ik}$ erfüllt ist. Vor allem ist aber von Wichtigkeit, daß die Komponenten des Spannungstensors an einer Stelle nur von der elektrischen Feldstärke *an dieser Stelle* abhängen. (Sie hängen zudem nur von dem *Feld*, nicht auch von der *Ladung* ab.) Immer wenn eine Kraft p sich nach (57) auf Spannungen S, die einen Linientensor 2. Stufe bilden, zurückführen läßt, welcher nur von den Werten der den physikalischen Zustand beschreibenden Zustandsgrößen an der betreffenden Stelle abhängt, werden wir diese Spannungen als das Primäre, die Kraftwirkungen als ihre Folge zu betrachten haben. Mathematisch erhellt die Berechtigung dieser Auffassungsweise daraus, daß die Kraft p sich aus der Spannung durch Differentiation ergibt; die Spannungen liegen also gegenüber den Kräften sozusagen um eine Differentiationsstufe weiter zurück und hängen trotzdem nicht, wie es für ein beliebiges Integral der Fall wäre, von dem ganzen Verlauf der Zustandsgrößen, sondern nur von ihrem Wert an der betr. Stelle ab.

Der Tensor (63) ist natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Führen wir das Quadrat des Betrages der Feldstärke ein

$$|E|^2 = E_i E^i,$$

so ist in der Tat

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \, |E|^2 - E_i E_k:$$

das sind die kovarianten Spannungskomponenten nicht nur in einem Cartesischen, sondern in einem beliebigen affinen Koordinatensystem, wenn die E_i die kovarianten Komponenten der Feldstärke sind. Die anschauliche Bedeutung der Spannungen ist überaus einfach. Benutzen wir an einer Stelle rechtwinklige Koordinaten, deren x_1-Achse in die Richtung von $\mathfrak{E}$ weist:

$$E_1 = |E|, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0,$$

so finden wir: sie bestehen aus einem Zug von der Stärke $\frac{1}{2}|E|^2$ in Richtung der Kraftlinien und einem Druck von der gleichen Stärke senkrecht zu ihnen.

Die elektrostatischen Grundgesetze können wir in invarianter Tensorgestalt jetzt so zusammenfassen:

$$(64) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \dfrac{\partial E_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0, \quad \textit{bzw.} \quad E_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \\ \text{(II)} & \dfrac{\partial E^i}{\partial x_i} = \varrho; \\ \text{(III)} & S_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \, |E|^2 - E_i E_k. \end{cases}$$

Einem System einzelner Punktladungen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ kommt die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

zu; r_{ik} bedeutet die Entfernung der beiden Ladungen e_i und e_k. Dies besagt, daß die virtuelle Arbeit, welche die an den einzelnen Punkten angreifenden (von den Ladungen der übrigen Punkte herrührenden) Kräfte bei einer infinitesimalen Verrückung der Punkte leisten, ein totales Differential, nämlich $= \delta U$ ist. Für kontinuierlich verteilte Ladungen geht diese Formel über in:

$$U = \iint \frac{\varrho(P)\,\varrho(P')}{8\pi r_{PP'}} \, dV \, dV';$$

beide Volumintegrationen nach P und P' erstrecken sich über den ganzen Raum, $r_{PP'}$ ist die Entfernung dieser beiden Punkte. Unter Benutzung des Potentials φ können wir dafür schreiben

$$U = -\tfrac{1}{2} \int \varrho \varphi \, dV.$$

Der Integrand ist $\varphi \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}$. Zufolge der Gleichung

$$\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{E}) = \varphi \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

und des Gaußschen Satzes, nach dem das über den gesamten Raum erstreckte Integral von div ($\varphi\,\mathfrak{E}$) gleich o wird, ist

$$-\int \varrho\varphi\, dV = \int (\mathfrak{E}\cdot \text{grad}\ \varphi)\, dV = \int |E|^2\, dV:$$

$$U = \int \tfrac{1}{2}\, |E|^2\, dV. \tag{65}$$

Diese Darstellung der Energie setzt unmittelbar in Evidenz, daß die Energie einen positiven Betrag besitzt. Führen wir die Kräfte auf Spannungen zurück, so müssen wir uns vorstellen, daß diese Spannungen (wie die Spannungen des elastischen Körpers) überall mit positiver potentieller Spannungsenergie verbunden sind; der Sitz der Energie wird also im Felde zu suchen sein. Darüber gibt die Formel (65) völlig befriedigende Rechenschaft; sie lehrt, daß die mit der Spannung verbundene Energie pro Volumeinheit $\frac{1}{2}\,|E|^2$ beträgt, also genau gleich dem Zug und Druck ist, welche in Richtung und senkrecht zu den Kraftlinien stattfinden. Wieder ist es natürlich entscheidend für die Zulässigkeit dieser Auffassungsweise, daß die erhaltene Energiedichte nur von dem Werte der das Feld charakterisierenden Zustandsgröße $\mathfrak{E}$ *an der betr. Stelle* abhängt. Es kommt jetzt nicht nur dem Gesamtfeld, sondern auch jedem Stück des Feldes ein bestimmter potentieller Energieinhalt $\int \frac{1}{2}\,|E|^2\, dV$ zu. In der Statik spielt nur die Gesamtenergie eine Rolle; erst wenn wir hernach zur Betrachtung veränderlicher Felder übergehen, werden sich unzweifelhafte Bestätigungen der Richtigkeit dieser Auffassung einstellen.

Auf Leitern sammeln sich im statischen Feld die Ladungen auf der Oberfläche, und im Innern der Konduktoren herrscht kein elektrisches Feld. Dann reichen die Gleichungen (61) aus, um das elektrische Feld im leeren Raum, im »Äther«, zu bestimmen. Befinden sich aber Nicht-Leiter, Diëlektrika, im Felde, so ist die Erscheinung der *diëlektrischen Polarisation* zu berücksichtigen. — Zwei an den Stellen P_1 und P_2 befindliche Ladungen $+e$ und $-e$, ein »Quellpaar«, wie wir kurz sagen wollen, erzeugen ein Feld, das aus dem Potential

$$\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

entspringt, in welchem r_1 und r_2 die Entfernungen der Punkte P_1, P_2 vom Aufpunkt O bedeuten. Das Produkt aus e und dem Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ heiße das Moment $\mathfrak{m}$ des Quellpaares. Lassen wir die beiden Ladungen an einer Stelle P in bestimmter Richtung zusammenrücken, indem wir dabei die Ladung gleichzeitig so wachsen lassen, daß das Moment $\mathfrak{m}$ konstant bleibt, so entsteht im Limes die »Doppelquelle« vom Moment $\mathfrak{m}$, deren Potential durch

$$\frac{\mathfrak{m}}{4\pi}\cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}$$

gegeben ist. In einem Diëlektrikum hat nun ein elektrisches Feld zur Folge, daß in den einzelnen Volumelementen desselben derartige Doppel-

quellen entstehen; diesen Vorgang bezeichnet man als Polarisation. Ist $\mathfrak{m}$ das elektrische Moment der Doppelquellen pro Volumeinheit, so gilt dann für das Potential statt (60) die Formel

$$(66) \qquad -4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r}\, dV + \int \mathfrak{m} \cdot \mathrm{grad}_P \frac{1}{r} \cdot dV.$$

Vom Standpunkt der Elektronentheorie können wir diesen Vorgang ohne weiteres verstehen. Stellen wir uns etwa vor, daß ein Atom aus einem ruhenden, positiv geladenen »Kern« besteht, um den ein Elektron von der entgegengesetzten Ladung in einer Kreisbahn rotiert. Im Zeitmittel für einen vollen Umlauf des Elektrons wird dann die mittlere Lage des Elektrons mit der des Kerns zusammenfallen und das Atom nach außen als völlig neutral erscheinen. Wenn aber ein elektrisches Feld wirkt, so übt dieses auf das negative Elektron eine Kraft aus, die zur Folge haben wird, daß seine Bahn zum Atomkern exzentrisch liegt, etwa eine Ellipse wird, in deren einem Brennpunkt der Kern sich befindet. Im Mittel für solche Zeiten, die groß sind gegenüber der Umlaufszeit des Elektrons, wird das Atom dann wirken wie ein ruhendes Quellpaar; oder wenn wir die Materie als kontinuierlich behandeln, werden wir in ihr kontinuierlich verbreitete Doppelquellen annehmen müssen. Schon vor einer genaueren atomistischen Durchführung dieses Gedankens werden wir sagen können, daß wenigstens in erster Annäherung dabei das Moment pro Volumeinheit $\mathfrak{m}$ der erregenden elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional sein wird: $\mathfrak{m} = \varkappa\mathfrak{E}$, wo $\varkappa$ eine Materialkonstante bedeutet, die von der chemischen Beschaffenheit der Substanz, nämlich dem Bau ihrer Atome und Moleküle, abhängt. Da

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathfrak{m}}{r}\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{m}}{r}$$

ist, können wir die Gleichung (66) ersetzen durch

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho - \mathrm{div}\,\mathfrak{m}}{r}\, dV.$$

Für die Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathrm{grad}\,\varphi$ ergibt sich daraus

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \varrho - \mathrm{div}\,\mathfrak{m}.$$

Führen wir also die »elektrische Verschiebung«

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{m}$$

ein, so lauten die Grundgleichungen jetzt

$$(67) \qquad \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = \varrho.$$

Sie entsprechen den Gleichungen (61); in der einen von ihnen tritt aber jetzt die Feldstärke $\mathfrak{E}$, in der andern die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ auf; die Ladungen sind die Quelle der elektrischen Verschiebung. Bei der obigen Annahme $\mathfrak{m} = \varkappa\mathfrak{E}$ erhält man, wenn man die Materialkonstante $\varepsilon = 1 + \varkappa$, die sog. Diëlektrizitätskonstante einführt, das Materialgesetz

$$(68) \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}.$$

Durch die Beobachtung bestätigen sich diese Gesetze aufs beste. Der von Faraday experimentell nachgewiesene Einfluß des Zwischenmediums, der sich in diesen Gesetzen kundgibt, ist, wie man weiß, für die Ausbildung der Nahewirkungstheorie von großer Bedeutung gewesen. — Auf eine entsprechende Erweiterung der Formeln für Spannung, Energie und Kraft können wir hier verzichten.

Es versteht sich aus dieser Herleitung, daß (67), (68) keine streng gültigen Gesetze sind, sondern sich auf Mittelwerte beziehen, zu bilden für Räume, die viele Atome enthalten, und für Zeiten, die groß sind gegenüber den Umlaufszeiten der Elektronen im Atom. *Als die exakten Naturgesetze sehen wir nach wie vor* (61) *an.* Unser Absehen hier und im folgenden ist durchaus auf die exakten Naturgesetze gerichtet. Es bilden aber, wenn man von den Erscheinungen ausgeht, solche »phänomenologischen« Gesetze wie (67), (68) den notwendigen Durchgangspunkt von dem, was die Beobachtungen direkt ergeben, zu der exakten Theorie. Im allgemeinen können wir erst von ihnen aus uns eine derartige Theorie erarbeiten. Diese wird sich dann als gültig erweisen, wenn es gelingt, unter Zuhilfenahme bestimmter Vorstellungen über die atomistische Konstitution der Materie von ihr aus durch Mittelwertbildung wieder zu den phänomenologischen Gesetzen zu gelangen. Es müssen sich dabei, wenn der Atombau bekannt ist, zugleich die Werte der in diesen Gesetzen auftretenden Materialkonstanten ergeben (in den exakten Naturgesetzen kommen keine solchen Konstanten vor). Da die Gültigkeit der Materialgesetze wie (68), die den Einfluß der Materie nur in Bausch und Bogen berücksichtigen, bei Vorgängen, für welche die feinere Struktur der Materie nicht gleichgültig ist, sicher versagt, müssen sich aus einer solchen atomistischen Theorie ferner die Grenzen der Gültigkeit der phänomenologischen Theorie ergeben und diejenigen Gesetze, welche jenseits dieser Grenzen an ihre Stelle treten. Die Elektronentheorie hat in alle dem große Erfolge aufzuweisen, wenn sie auch wegen der Schwierigkeit, über den feineren Aufbau des Atoms und die Vorgänge im Innern desselben Aufschluß zu erhalten, noch lange nicht zum Abschluß gekommen ist. —

Der *Magnetismus* scheint nach den ersten Erfahrungen an permanenten Magneten nur eine Wiederholung der Elektrizität: auch hier das Coulombsche Gesetz! Sogleich aber macht sich ein charakteristischer Unterschied geltend: man kann positiven und negativen Magnetismus nicht voneinander trennen; es gibt keine Quellen, sondern nur Doppelquellen des Magnetfeldes; der Magnet besteht aus unendlichkleinen Elementarmagneten, deren jeder schon positiven und negativen Magnetismus in sich trägt. De facto ist aber die Magnetismusmenge in jedem Materiestück $= 0$, und das heißt denn doch: es gibt in Wahrheit gar keinen Magnetismus. Die Aufklärung brachte die Entdeckung der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes durch Örsted. Die im *Biot-Savartschen Gesetz* niedergelegte genaue quantitative Formulierung dieser Wirkung führt

ebenso wie das Coulombsche auf zwei einfache Nahewirkungsgesetze: bedeutet $\mathfrak{s}$ die Dichte des elektrischen Stroms, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, so gilt

$$(69) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{s}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Die zweite Gleichung sagt die Nicht-Existenz von Quellen des Magnetfeldes aus. Die Gleichungen (69) sind ein genaues Seitenstück zu (61) unter Vertauschung von div und rot. Diese beiden Operationen der Vektoranalysis entsprechen sich in derselben Weise, wie in der Vektoralgebra skalare und vektorielle Multiplikation (div ist skalare, rot vektorielle Multiplikation mit dem symbolischen Vektor »Differentiation«). Die im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichungen (69) bei gegebener Stromverteilung lautet daher auch ganz entsprechend zu (59):

$$(70) \qquad \mathfrak{H} = \int \frac{[\mathfrak{s}\mathfrak{r}]}{4\pi r^3}\, dV;$$

das ist eben das Biot-Savartsche Gesetz. Man kann diese Lösung aus einem »Vektorpotential« $-\mathfrak{f}$ ableiten nach den Formeln

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{rot} \mathfrak{f}, \qquad -4\pi\mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{s}}{r}\, dV.$$

Schließlich lautet die Formel für die Kraftdichte des Magnetfeldes gan analog zu (62):

$$(71) \qquad \mathfrak{p} = [\mathfrak{s}\mathfrak{H}].$$

Es ist kein Zweifel, daß wir durch diese Gesetze die Wahrheit über der Magnetismus erfahren. Sie sind keine Wiederholung, aber ein genaue Seitenstück der elektrischen; sie entsprechen ihnen wie das vektoriell Produkt dem skalaren. Es läßt sich aus ihnen mathematisch beweisen daß ein kleiner Kreisstrom genau so wirkt wie ein kleiner, senkrech durch den Kreisstrom hindurchgesteckter Elementarmagnet. Wir habe uns infolgedessen nach Ampère vorzustellen, daß die magnetische Wirkun magnetisierter Körper auf Molekularströmen beruhe; nach der Elektronen theorie sind diese ohne weiteres gegeben durch die im Atom umlaufende Elektronen.

Auch die Kraft $\mathfrak{p}$ des Magnetfeldes kann auf Spannungen zurück geführt werden, und zwar ergeben sich für die Spannungskomponente genau die gleichen Werte wie im elektrostatischen Felde: man brauch nur $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ zu ersetzen. Wir werden infolgedessen für die Dicht der im Felde enthaltenen potentiellen Energie hier genau den entsprechen den Ansatz $\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2$ machen; seine volle Rechtfertigung findet er erst in de Theorie der zeitlich veränderlichen Felder.

Aus (69) folgt, daß der Strom quellenfrei verteilt ist: $\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$. Da Strömungsfeld kann daher in lauter in sich zurücklaufende Stromröhre zerlegt werden; durch alle Querschnitte einer einzelnen Stromröhre flie derselbe Gesamtstrom. Aus den Gesetzen des stationären Feldes geht

keiner Weise hervor und es kommt für sie in keiner Weise in Betracht, daß dieser Strom elektrischer Strom im wörtlichen Sinne ist, d. h. aus bewegter Elektrizität besteht; dies ist aber zweifellos der Fall. Im Lichte dieser Tatsache besagt das Gesetz div $\mathfrak{s} = 0$, daß Elektrizität weder entsteht noch vergeht. Nur darum, weil der Fluß des Stromvektors $\mathfrak{s}$ durch eine geschlossene Oberfläche Null ist, kann die Dichte der Elektrizität allerorten unverändert bleiben — es handelt sich jetzt ausschließlich um stationäre Felder! —, ohne daß Elektrizität entsteht oder vergeht. — Das oben eingeführte Vektorpotential $\mathfrak{f}$ genügt ebenfalls der Gleichung div $\mathfrak{f} = 0$.

$\mathfrak{s}$ ist als elektrischer Strom ohne Zweifel ein Vektor im eigentlichen Sinne des Worts. Dann geht aber aus dem Biot-Savart'schen Gesetz hervor, daß $\mathfrak{H}$ *nicht ein Vektor, sondern ein Flächentensor 1. Stufe ist*, dessen Komponenten in irgend einem (Cartesischen oder auch nur affinen Koordinatensystem) H_{ik} heißen mögen. Das Vektorpotential $\mathfrak{f}$ ist ein wirklicher Vektor. Sind φ_i seine kovarianten Komponenten und s^i die kontravarianten der Stromdichte (der Strom ist von Hause aus wie die Geschwindigkeit ein kontravarianter Vektor), so enthält die folgende Tabelle die endgültige (von der Dimensionszahl unabhängige) Form der *Gesetze des Magnetfeldes eines stationären elektrischen Stromes:*

$$(72, \text{I}) \qquad \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0, \qquad \textit{bzw.} \qquad H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

und

$$(72, \text{II}) \qquad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i.$$

Die Spannungen bestimmen sich aus

$$(72, \text{III}) \qquad S_{ik} = H_{ir} H_k^r - \tfrac{1}{2} g_{ik} |H|^2,$$

wo $|H|$ *den Betrag des Magnetfeldes bedeutet:*

$$|H|^2 = \tfrac{1}{2} H_{ik} H^{ik}.$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch, da

$$H_{ir} H_k^r = H_i^r H_{kr} = g^{rs} H_{ir} H_{ks}.$$

Die Komponenten der Kraftdichte sind

$$(72, \text{IV}) \qquad p_i = H_{ik} s^k,$$

die Energiedichte $\qquad = \tfrac{1}{2} |H|^2.$

Das sind die Gesetze, wie sie für das Feld im leeren Raum gelten; wir betrachten sie wie im elektrischen Fall als die allgemein gültigen exakten Naturgesetze. Für eine phänomenologische Theorie muß aber wieder die der diëlektrischen Polarisation analoge Erscheinung der *Magnetisierung* beachtet werden; hier tritt dann wie $\mathfrak{D}$ neben $\mathfrak{E}$ die »Magnetinduktion« $\mathfrak{B}$ neben der Feldstärke $\mathfrak{H}$ auf, es gelten die Feldgesetze

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{s}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

und das Materialgesetz

(73) $$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H};$$

die Materialkonstante μ heißt magnetische Permeabilität. Während aber das einzelne Atom durch die Wirkung der elektrischen Feldstärke erst polarisiert (zu einer Doppelquelle) wird, und zwar in Richtung der Feldstärke, ist das Atom wegen der in ihm befindlichen rotierenden Elektronen von vorn herein ein Elementarmagnet. Aber alle diese Elementarmagnete heben ihre Wirkungen gegenseitig auf, solange sie ungeordnet sind und alle Stellungen der Elektronen-Kreisbahnen im Durchschnitt gleich oft vorkommen. Die einwirkende magnetische Kraft hat hier lediglich die Funktion, die vorhandenen Doppelquellen zu *richten.* Damit hängt es offenbar zusammen, daß der Geltungsbereich der Gleichung (73) ein viel engerer ist als der der entsprechenden Gleichung (68). Ihm sind vor allem die permanenten Magnete und die ferromagnetischen Körper (Eisen, Nickel, Kobalt) nicht unterstellt.

Zu den bisherigen tritt in der phänomenologischen Theorie als weiteres das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E} \quad (\sigma = \text{Leitfähigkeit});$$

es sagt aus, daß der Strom dem Potentialgefälle folgt und ihm bei gegebener Leitersubstanz proportional ist. In der atomistischen Theori entspricht dem Ohmschen Gesetz das Grundgesetz der Mechanik, nac welchem die auf die »freien« Elektronen wirkende elektrische und ma netische Kraft deren Bewegung bestimmt und so den elektrischen Stro erzeugt. Infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen wird dab keine dauernde Beschleunigung eintreten, sondern (wie bei einem schwer fallenden Körper infolge des Luftwiderstandes) sich alsbald eine Gre geschwindigkeit herausbilden, die man wenigstens in erster Annäher der treibenden elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ proportional setzen kann; so w das Ohmsche Gesetz verständlich.

Wird der Strom durch ein galvanisches Element oder einen Akkumul erzeugt, so wird durch den sich abspielenden chemischen Prozeß zwis Anfang und Ende der Drahtleitung eine konstante Potentialdifferenz recht erhalten, die »elektromotorische Kraft«. Da die Vorgänge, die in dem Stromerzeuger abspielen, offenbar nur von einer atomisti Theorie verstanden werden können, ist es phänomenologisch am fachsten, ihn durch einen Querschnitt im geschlossenen Leitungskre Darstellung zu bringen, über den hinüber das Potential einen S erleidet, welcher gleich der elektromotorischen Kraft ist.

Dieser kurze Überblick über die Maxwellsche Theorie des stati Feldes wird uns für das Folgende genügen. Auf Einzelheiten und k Anwendungen können wir uns hier natürlich nicht einlassen.

Kapitel II.

Riemannsche Geometrie.

§ 10. Bericht über Nicht-Euklidische Geometrie[1]).

Der Zweifel an der Euklidischen Geometrie scheint so alt zu sein wie diese selbst und ist keineswegs erst, wie das von unsern Philosophen meist angenommen wird, eine Ausgeburt moderner mathematischer Hyperkritik. Dieser Zweifel hat sich von jeher an das *V. Postulat des Euklid* geknüpft. Es besagt im wesentlichen, daß in einer Ebene, in der eine Gerade g und ein nicht auf ihr gelegener Punkt P gegeben sind, nur eine einzige Gerade existiert, welche durch P hindurchgeht und g nicht schneidet; sie heißt die Parallele. Während die übrigen Axiome des Euklid ohne weiteres als evident zugestanden wurden, haben sich schon die ältesten Erklärer bemüht, diesen Satz auf Grund der übrigen Axiome zu beweisen. Heute, wo wir wissen, daß das gesteckte Ziel nicht erreicht werden konnte, müssen wir in diesen Betrachtungen die ersten Anfänge der »Nicht-Euklidischen« Geometrie erblicken, d. h. des Aufbaus eines geometrischen Systems, das zu seinen logischen Grundlagen die sämtlichen Axiome des Euklid mit Ausnahme des Parallelenpostulats annimmt. Wir besitzen von Proklus (5. Jahrh. n. Chr.) einen Bericht über derartige Versuche. Proklus warnt darin ausdrücklich vor dem Mißbrauch, der mit Berufungen auf Evidenz getrieben werden kann, (man darf nicht müde werden, diese Warnung zu wiederholen; man darf aber auch nicht müde werden, zu betonen, daß trotz ihres vielfachen Mißbrauchs die Evidenz letzter Ankergrund aller Erkenntnis ist, auch der empirischen) und besteht auf der Möglichkeit, daß es »asymptotische Gerade« geben könne.

Dazu mag man sich folgendes Bild machen. In einer Ebene sei eine feste Gerade g, ein nicht auf ihr gelegener Punkt P gegeben und eine durch P hindurchgehende, um P drehbare Gerade s. In ihrer Ausgangslage möge sie etwa senkrecht auf g sein. Drehen wir jetzt s, so gleitet der Schnittpunkt von s und g auf g entlang, z. B. nach rechts hinüber, und es tritt ein bestimmter Moment ein, wo dieser Schnittpunkt gerade ins Unendliche entschwunden ist: dann hat s die Lage einer »asymptotischen« Geraden. Drehen wir weiter, so nimmt Euklid an, daß im selben Moment schon ein Schnittpunkt von links her auftritt. Proklus dagegen weist auf die Möglichkeit hin, daß man vielleicht erst durch einen gewissen Winkel weiter drehen muß, ehe ein Schnittpunkt auf der linken Seite zustande kommt. Dann hätten wir zwei »asymptotische« Gerade, eine nach

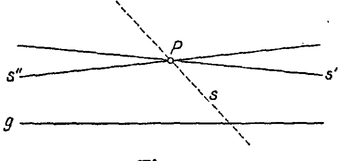


Fig. 2.

rechts s' und eine nach links s''. Liegt die Gerade s durch P in dem Winkelraum zwischen s'' und s' (bei der eben geschilderten Drehung), so schneidet sie g; liegt sie zwischen s' und s'', so schneidet sie nicht. — *Eine* nicht-schneidende muß mindestens existieren; das folgt aus den übrigen Axiomen Euklids. Ich erinnere an eine aus dem ersten Elementarunterricht in der Geometrie vertraute ebene Figur, bestehend aus der Geraden h und zwei Geraden g und g', die h in A und A' unter gleichen Winkeln schneiden. g und g' werden beide durch ihren Schnitt mit h in eine rechte und eine linke Hälfte zerlegt. Hätten nun g und g' etwa einen auf der rechten Seite von h gelegenen Schnittpunkt S gemein, so würde sich, da (s. Fig. 3) $BAA'B'$ kongruent zu $C'A'AC$ ist, auch auf der linken Seite ein solcher Schnittpunkt S^* ergeben; dies ist aber unmöglich, da durch zwei Punkte S und S^* nur eine einzige Gerade hindurchgeht.

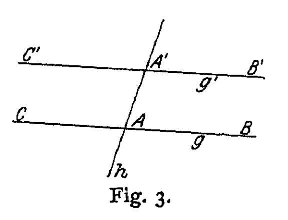


Fig. 3.

Die Versuche, das Euklidische Postulat zu erweisen, setzen sich unter den Arabern und unter den abendländischen Mathematikern des Mittelalters fort. Wir nennen nur, sofort in die neuere Zeit hinüberspringend, die Namen der letzten bedeutendsten Vorläufer der Nicht-Euklidischen Geometrie: den Jesuitenpater Saccheri (Beginn des 18. Jahrh.), die Mathematiker Lambert und Legendre. Saccheri weiß, daß die Frage der Gültigkeit des Parallelenpostulats der andern äquivalent ist, ob die Winkelsumme im Dreieck gleich oder kleiner als 180^0 ist. Ist sie in *einem* Dreieck $= 180^0$, so ist sie es in jedem, und es gilt die Euklidische Geometrie; ist sie in *einem* Dreieck $< 180^0$, so ist sie in jedem Dreieck $< 180^0$. Daß sie $> 180^0$ ausfällt, ist aus dem gleichen Grunde ausgeschlossen, aus dem eben gefolgert wurde, daß nicht alle Gerade durch P die feste Gerade g schneiden können. Lambert entdeckte, daß unter der Voraussetzung einer Winkelsumme $< 180^0$ in der Geometrie eine ausgezeichnete Länge existiert; es hängt das eng mit der schon von Wallis gemachten Bemerkung zusammen, daß es in der Nicht-Euklidischen Geometrie (ganz so wie in der Geometrie auf einer festen Kugel) keine ähnlichen Figuren verschiedener Größe gibt: wenn es also so etwas gibt wie *Gestalt* unabhängig von Größe, so besteht die Euklidische Geometrie zu Recht. Außerdem leitete Lambert eine Formel für den Dreiecksinhalt her, aus welcher hervorgeht, daß dieser Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht über alle Grenzen wachsen kann. Es scheint, daß sich durch die Untersuchungen dieser Männer allmählich in weiteren Kreisen der Glaube an die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats Bahn gebrochen hat. Die Frage hat damals viele Gemüter bewegt; d'Alembert bezeichnete es als einen Skandal der Geometrie, daß sie noch immer nicht zur Entscheidung gebracht sei. Die Autorität Kants, dessen philosophisches System die Euklidische Geometrie als apriorische, den Gehalt der reinen

Raumanschauung in adäquaten Urteilen wiedergebende Erkenntnis in Anspruch nimmt, konnte den Zweifel nicht auf die Dauer unterdrücken.

Auch Gauß ist ursprünglich noch darauf aus gewesen, das Parallelenaxiom zu beweisen; doch hat er bald die Überzeugung gewonnen, daß dies unmöglich sei, und hat die Prinzipien einer Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher jenes Axiom nicht erfüllt ist, bis zu einem solchen Punkte entwickelt, daß von da ab der weitere Ausbau mit der nämlichen Leichtigkeit vollzogen werden kann wie der der Euklidischen Geometrie. Er hat aber über seine Untersuchungen nichts bekannt gegeben; er fürchtete, wie er später einmal in einem Privatbriefe schrieb, das »Geschrei der Böoter«; denn es gäbe nur wenige, welche verstünden, worauf es bei diesen Dingen eigentlich ankäme. Unabhängig von Gauß ist Schweikart, ein Professor der Jurisprudenz, zu vollem Einblick in die Verhältnisse der Nicht-Euklidischen Geometrie gelangt, wie aus einem knapp gehaltenen, an Gauß gerichteten Notizblatt hervorgeht. Er hielt es wie Gauß für keineswegs selbstverständlich und ausgemacht, daß in unserm wirklichen Raum die Euklidische Geometrie gilt. Sein Neffe Taurinus, den er zur Beschäftigung mit diesen Fragen anregte, war zwar im Gegensatz zu ihm ein Euklid-Gläubiger; ihm verdanken wir aber die Entdeckung, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf einer Kugel vom imaginären Radius $\sqrt{-1}$ reell sind und durch sie auf analytischem Wege ein geometrisches System konstruiert ist, das den Axiomen des Euklid außer dem V. Postulat, diesem aber nicht genügt.

Vor der Öffentlichkeit müssen sich in den Ruhm, Entdecker und Erbauer der Nicht-Euklidischen Geometrie zu sein, teilen der Russe *Nikolaj Jwanowitsch Lobatschefskij* (1793—1856), Professor der Mathematik in Kasan, und der Ungar *Johann Bolyai* (1802—1860), Offizier der österreichischen Armee. Beide kamen mit ihren Ideen um 1826 ins Reine; die Hauptschrift beider, die der Öffentlichkeit ihre Entdeckung mitteilte und eine Begründung der neuen Geometrie im Stile Euklids darbot, stammt aus den Jahren 1830/31. Die Darstellung bei Bolyai ist besonders durchsichtig dadurch, daß er die Entwicklung so weit als möglich führt, ohne über die Gültigkeit oder Ungültigkeit des V. Postulats eine Annahme zu machen und erst am Schluß aus den Sätzen dieser seiner »absoluten« Geometrie, je nachdem ob man sich für oder wider Euklid entscheidet, die Theoreme der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie herleitet.

Wenn so auch das Gebäude errichtet war, so war es noch immer nicht definitiv sichergestellt, ob sich schließlich nicht doch einmal in der absoluten Geometrie das Parallelenaxiom als ein Folgesatz herausstellen würde; der strenge *Beweis der Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie* stand noch aus. Er ergab sich aber aus der Weiterentwicklung der Nicht-Euklidischen Geometrie fast wie von selbst. Der einfachste Weg zu diesem Beweis wurde freilich, wie das oft geschieht, nicht zuerst eingeschlagen; er ist erst von Klein um 1870 aufgefunden worden und

beruht auf der Konstruktion eines *Euklidischen Modells* für die Nicht-Euklidische Geometrie [2]). Beschränken wir uns auf die Ebene! In einer Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y zeichnen wir den Kreis U vom Radius 1 um den Koordinatenursprung. Führen wir homogene Koordinaten ein,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

(so daß also die Lage eines Punktes durch das Verhältnis von drei Zahlen $x_1 : x_2 : x_3$ charakterisiert ist), so lautet die Gleichung des Kreises

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Die auf der linken Seite stehende quadratische Form werde mit $\Omega(x)$ bezeichnet, die zugehörige symmetrische Bilinearform zweier Wertsysteme x_i, x_i' mit $\Omega(xx')$. Eine Abbildung, die jedem Punkt x einen Bildpunkt x' durch die linearen Formeln

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \qquad (|\alpha_{ik}| \neq 0)$$

zuordnet, heißt bekanntlich eine Kollineation (die affinen Abbildungen sind spezielle Kollineationen). Sie führt jede Gerade Punkt für Punkt wieder in eine Gerade über und läßt das Doppelverhältnis von 4 Punkten auf einer Geraden ungeändert. Wir stellen jetzt ein Lexikon auf, durch das die Begriffe der Euklidischen Geometrie in eine fremde Sprache, die »Nicht-Euklidische«, übersetzt werden, deren Worte wir durch Anführungsstriche kennzeichnen. Das Lexikon besteht nur aus drei Vokabeln.

»*Punkt*« heißt jeder Punkt im Innern von U.

»*Gerade*« heißt das innerhalb U verlaufende Stück einer Geraden. Unter den Kollineationen, welche den Kreis U in sich überführen, gibt es zwei verschiedene Arten: solche, welche das Innere von U auf das Innere abbilden, und solche, die das Innere auf das Äußer abbilden. Die Kollineationen der ersten Ar nennen wir »kongruente« Abbildungen un zwei aus »Punkten« bestehende Figuren »*kon gruent*«, wenn sie durch eine solche Abbildun ineinander übergeführt werden können. F diese »Punkte« und »Geraden« und für dies Begriff der »Kongruenz« gelten die sämtlich Axiome Euklids mit Ausnahme des Parallel postulats. In Fig. 4 ist ein ganzes Büsc von »Geraden« durch den »Punkt« P zeichnet, die alle die eine »Gerade« g nicht schneiden. Die Widerspruc losigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie ist damit erwiesen; denn sind Dinge und Beziehungen aufgewiesen, für welche bei geeign Namengebung die sämtlichen Sätze jener Geometrie erfüllt sind. —

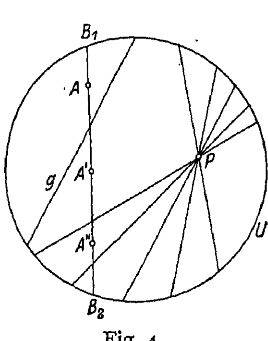


Fig. 4.

Übertragung des Kleinschen Modells auf die räumliche Geometrie ist offenbar ohne weiteres möglich.

Wir wollen in diesem Modell noch die Nicht-Euklidische Entfernung zweier »Punkte«

$$A = (x_1 : x_2 : x_3), \qquad A' = (x_1' : x_2' : x_3')$$

bestimmen. Die Gerade AA' schneide den Kreis U in den beiden Punkten B_1, B_2. Die homogenen Koordinaten y_i jedes dieser beiden Punkte haben die Form

$$y_i = \lambda x_i + \lambda' x_i',$$

und das zugehörige Parameterverhältnis $\lambda : \lambda'$ ergibt sich aus der Gleichung $\Omega(y) = 0$:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\Omega(xx') \pm \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\,\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

Das Doppelverhältnis der vier Punkte $AA'B_1B_2$ ist daher

$$[AA'] = \frac{\Omega(xx') + \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\,\Omega(x')}}{\Omega(xx') - \sqrt{\Omega^2(xx') - \Omega(x)\,\Omega(x')}}.$$

Diese von den beiden willkürlichen »Punkten« A, A' abhängige Größe ändert sich nicht bei einer »kongruenten« Abbildung. Sind $AA'A''$ irgend drei, in der hingeschriebenen Reihenfolge auf einer »Geraden« gelegene »Punkte«, so ist

$$[AA''] = [AA'] \cdot [A'A''].$$

Die Größe

$$\tfrac{1}{2} \lg [AA'] = \overline{AA'} = r$$

hat also die Funktionaleigenschaft

$$\overline{AA'} + \overline{A'A''} = \overline{AA''}.$$

Da sie außerdem für »kongruente« Strecken AA' den gleichen Wert hat, ist sie als die Nicht-Euklidische Entfernung der beiden Punkte AA' anzusprechen. Indem wir unter lg den natürlichen Logarithmus verstehen, erhalten wir in Einklang mit der Erkenntnis Lamberts eine absolute Festlegung der Maßeinheit. Die Definition läßt sich einfacher so schreiben:

(1) $$\mathrm{Cof}\, r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x) \cdot \Omega(x')}}. \qquad (\mathrm{Cof} = \text{Cosinus hyperbolicus.})$$

Diese Maßbestimmung ist unter Zugrundelegung eines beliebigen reellen oder imaginären Kegelschnitts $\Omega(x) = 0$ vor Klein bereits von Cayley als »projektive Maßbestimmung« aufgestellt worden[3]; aber erst Klein erkannte, daß sie für einen reellen Kegelschnitt zur Nicht-Euklidischen Geometrie führt.

Man muß nicht wähnen, das Kleinsche Modell zeige, daß die Nicht-Euklidische Ebene endlich sei. Vielmehr kann ich, Nicht-Euklidisch gemessen, auf einer »Geraden« dieselbe Strecke unendlich oft hintereinander abtragen; nur im *Euklidischen* Modell *Euklidisch* gemessen, werden die

Abstände dieser »äquidistanten« Punkte immmer kleiner und kleiner. Für die Nicht-Euklidische Ebene ist der Grenzkreis U das unerreichbare Unendlichferne.

Die Cayleysche Maßbestimmung für einen imaginären Kegelschnitt führt auf die gewöhnliche sphärische Geometrie, wie sie auf einer Kugel im Euklidischen Raum Geltung hat. Die größten Kreise treten darin an Stelle der geraden Linien, es muß aber jedes aus zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten bestehende Punktepaar als einzelner »Punkt« betrachtet werden, damit sich zwei »Geraden« nur in einem »Punkte« schneiden. Wir projizieren die Kugelpunkte durch geradlinige Strahlen vom Zentrum auf die in einem Kugelpunkte, dem Südpol, gelegte Tangentenebene: in dieser Bildebene fallen alsdann je zwei diametral gegenüberliegende Punkte zusammen. Die Ebene müssen wir aber wie in der projektiven Geometrie mit einer unendlich fernen Geraden ausstatten, die das Bild des Äquatorkreises ist. Wir nennen zwei Figuren in dieser Ebene jetzt »kongruent«, wenn ihre durch die Zentralprojektion auf der Kugel entstehenden Bilder im gewöhnlichen Euklidischen Sinne kongruent sind. Unter Anwendung dieses »Kongruenz«-Begriffs gilt dann in der Ebene eine Nicht-Euklidische Geometrie, in der alle Axiome Euklids erfüllt sind mit Ausnahme des V. Postulats. An dessen Stelle tritt aber hier die Tatsache, daß je zwei Gerade ohne Ausnahme sich schneiden, und in Übereinstimmung damit ist die Winkelsumme $> 180^\circ$. Das scheint mit einem oben erwähnten Euklidischen Beweis in Widerspruch zu stehen Die Antinomie löst sich dadurch, daß in der jetzigen, »sphärischen Geometrie die Gerade eine geschlossene Linie ist, während Euklid, ohn es allerdings in den Axiomen auszusprechen, stillschweigend voraussetz daß sie eine offene Linie ist, nämlich durch jeden ihrer Punkte in zw Hälften zerfällt. Nur unter dieser Voraussetzung ist der in seinem B- weis gezogene Schluß zwingend, daß der auf der »rechten« Seite gelege hypothetische Schnittpunkt S von dem auf der »linken« Seite gelegen S^* verschieden ist.

Wir benutzen im Raum ein Cartesisches Koordinatensystem x_1 x_2 dessen Nullpunkt im Kugelzentrum liegt, dessen x_3-Achse in die Verbindung linie Nord-Südpol fällt und welchem als Maßeinheit der Kugelradius grunde liegt. Sind x_1, x_2, x_3 die Koordinaten irgend eines Kugelpunkt

$$\Omega(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

so sind $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ die erste und zweite Koordinate des Bildpunktes unserer Ebene $x_3 = 1$; $x_1 : x_2 : x_3$ ist also das Verhältnis der ho genen Koordinaten des Bildpunktes. Kongruente Abbildungen der K sind lineare Transformationen, welche die quadratische Form $\Omega(x)$ variant lassen; die »kongruenten« Abbildungen der Ebene im S unserer »sphärischen« Geometrie sind also durch solche lineare Tr formationen der homogenen Koordinaten gegeben, welche die Gleic

$\Omega(x) = 0$, die einen imaginären Kegelschnitt bedeutet, in sich überführen. Damit ist unsere Behauptung betreffs des Zusammenhanges der sphärischen Geometrie mit der Cayleyschen Maßbestimmung bewiesen. Im Einklang damit lautet die Formel für die Entfernung r zweier Punkte A, A' hier

$$\cos r = \frac{\Omega(xx')}{\sqrt{\Omega(x)\,\Omega(x')}}. \tag{2}$$

Zugleich haben wir die Entdeckung des Taurinus bestätigt, daß die Nicht-Euklidische Geometrie identisch ist mit der sphärischen auf einer Kugel vom Radius $\sqrt{-1}$.

Zwischen die Bolyai-Lobatschefskysche und die sphärische Geometrie schiebt sich als Grenzfall die Euklidische ein. Lassen wir nämlich einen reellen Kegelschnitt durch einen ausgearteten in einen imaginären übergehen, so verwandelt sich die mit der zugehörigen Cayleyschen Maßbestimmung ausgestattete Ebene von einer Bolyai-Lobatschefskyschen durch eine Euklidische hindurch in eine sphärische.

§ 11. Riemannsche Geometrie.

Die für uns vor allem bedeutsame Weiterentwicklung der Idee der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Riemann knüpft an die Grundlagen der Infinitesimalgeometrie, insbesondere der Flächentheorie an, wie sie von Gauß in seinen Disquisitiones circa superficies curvas gelegt worden sind.

Die ursprünglichste Eigenschaft des Raumes ist die, daß seine Punkte eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Was verstehen wir darunter? Wir sagen z. B., daß die Ellipsen (nach Größe und Gestalt, d. h. wenn man kongruente Ellipsen als gleich, nicht-kongruente als verschieden betrachtet) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, weil die einzelne Ellipse innerhalb dieser Gesamtheit durch zwei Zahlangaben, den Wert der halben großen und kleinen Achse, festgelegt werden kann. Die Gleichgewichtszustände eines idealen Gases, deren Verschiedenheit etwa durch die Unabhängigen: Druck und Temperatur charakterisiert werde, bilden eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, ebenso die Punkte auf einer Kugel — oder die einfachen Töne nach Intensität und Qualität. Die Farben bilden gemäß der physiologischen Theorie, nach der die Farbwahrnehmung bestimmt ist durch die Kombination dreier chemischer Prozesse auf der Retina, des Schwarz-Weiß, Rot-Grün und Gelb-Blau-Prozesses, deren jeder in einer bestimmten Richtung mit bestimmter Intensität vor sich gehen kann, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit nach Qualität und Intensität, die Farbqualitäten jedoch nur eine zweidimensionale; es findet dies seine Bestätigung durch die bekannte Maxwellsche Konstruktion des Farbdreiecks. Die möglichen Lagen eines starren Körpers bilden eine sechsdimensionale Mannigfaltigkeit, die möglichen Lagen eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden allgemein eine n-dimensionale. *Für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist charakteristisch, daß man das einzelne zu ihr gehörige Element* (in unsern Beispielen: die einzelnen Punkte oder

Zustände, Farben oder Töne) *festlegen kann durch die Angabe der Zahlwerte von n Größen, den »Koordinaten«, die stetige Funktionen innerhalb der Mannigfaltigkeit sind.* Dabei ist aber nicht erforderlich, zu verlangen, daß die ganze Mannigfaltigkeit mit allen ihren Elementen umkehrbar-eindeutig und stetig in dieser Weise durch die Wertsysteme von n Koordinaten repräsentiert werde (z. B. ist das ausgeschlossen für die Kugel, $n = 2$), sondern es kommt nur darauf an, daß, wenn P ein beliebiges Element der Mannigfaltigkeit ist, jedesmal eine gewisse Umgebung der Stelle P umkehrbar-eindeutig und stetig auf die Wertsysteme von n Koordinaten abgebildet werden kann. Ist x_i ein System von n Koordinaten, x_i^* irgend ein anderes, so werden die Koordinatenwerte x_i und x_i^* desselben Elementes allgemein durch Relationen

$$x_i = f_i(x_1^* x_2^* \cdots x_n^*) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

miteinander verknüpft sein, die nach den x_i^* auflösbar sind und in dene die f_i stetige Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Solange wir vo der Mannigfaltigkeit nichts weiter wissen, sind wir nicht imstande, irgen ein Koordinatensystem vor den andern auszuzeichnen. Zur analytische Behandlung beliebiger stetiger Mannigfaltigkeiten wird also eine Theor der Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen (3) nöt während wir uns im vorigen Kapitel zur Durchführung der affinen Ge metrie auf die viel speziellere Theorie der Invarianz gegenüber *linea* Transformationen stützten.

Die Infinitesimalgeometrie beschäftigt sich mit dem Studium von Kur und Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, der auf die Cart schen Koordinaten x, y, z bezogen werde. Eine *Kurve* ist allgemein eindimensionale Punktmannigfaltigkeit; ihre einzelnen Punkte können d die Werte eines Parameters u voneinander unterschieden werden. Befi sich der Kurvenpunkt u an der Raumstelle mit den Koordinaten xyz werden x, y, z bestimmte stetige Funktionen von u sein:

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u), \tag{4}$$

und (4) ist die »Parameterdarstellung« der Kurve. Deuten wir Zeit, so gibt (4) das Gesetz der Bewegung eines Punktes, welche gegebene Kurve durchläuft. Durch die Kurve selbst ist aber die Paran darstellung (4) nicht eindeutig bestimmt; vielmehr kann der Param noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden.

Eine zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit heißt *Fläche*; ihre können durch die Werte zweier Parameter u_1, u_2 unterschieden w und sie besitzt daher eine Parameterdarstellung der Art:

$$x = x(u_1 u_2), \qquad y = y(u_1 u_2), \qquad z = z(u_1 u_2). \tag{5}$$

Wieder können die Parameter u_1, u_2 noch einer beliebigen stetigen formation unterworfen werden, ohne daß die so dargestellte Fläc ändert. Wir wollen annehmen, daß die Funktionen in (5) nicht nu sondern auch stetig differentiierbar sind. Von dieser Darstellung (

beliebigen Fläche geht Gauß in seiner allgemeinen Theorie aus; die Parameter u_1, u_2 bezeichnet man daher als Gaußsche (oder krummlinige) Koordinaten auf der Fläche. — Ein Beispiel: Projizieren wir wie im vorigen Paragraphen die Punkte der Einheitskugel um den Nullpunkt des Koordinatensystems vom Zentrum auf die Tangentenebene $z = 1$ im Südpol, nennen xyz die Koordinaten eines beliebigen Kugelpunktes und u_1, u_2 die x- und y-Koordinate des Projektionspunktes in dieser Ebene, so ist

$$(6)\quad x = \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad y = \frac{u_2}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}}.$$

Das ist eine Parameterdarstellung der Kugel; sie erfaßt jedoch nicht die ganze Kugel, sondern nur eine gewisse Umgebung des Südpols, nämlich die südliche Halbkugel bis zum Äquator, aber mit Ausschluß desselben. Eine andere Parameterdarstellung liefern die geographischen Koordinaten Länge und Breite.

In der Thermodynamik benutzen wir zur graphischen Darstellung eine Bildebene mit einem rechtwinkligen Koordinatenkreuz, in der wir den etwa durch Druck p und Temperatur ϑ gegebenen Zustand eines Gases repräsentieren durch einen Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten p, ϑ. Das gleiche Verfahren können wir hier anwenden: dem Punkt $u_1 u_2$ auf der Fläche ordnen wir in einer »Bildebene« den Bildpunkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $u_1 u_2$ zu. Die Formeln (5) stellen dann nicht nur die Fläche, sondern gleichzeitig eine bestimmte stetige *Abbildung* dieser Fläche auf die $u_1 u_2$-Ebene dar. Beispiele solcher ebenen Abbildungen krummer Flächenstücke sind jedermann in den geographischen Karten geläufig. Eine Kurve auf der Fläche ist mathematisch gegeben durch eine Parameterdarstellung

$$(7)\qquad u_1 = u_1(t), \qquad u_2 = u_2(t),$$

ein Flächenstück durch ein »mathematisches Gebiet« in den Variablen $u_1 u_2$, das mittels Ungleichungen zwischen u_1, u_2 charakterisiert werden muß; graphisch gesprochen also: durch die Bildkurve, bzw. das Bildgebiet in der $u_1 u_2$-Ebene. Bedeckt man die Bildebene nach Art des Millimeterpapiers mit einem Koordinatennetz, so überträgt sich dieses vermöge der Abbildung auf die krumme Fläche als ein aus kleinen parallelogrammatischen Maschen bestehendes Netz, das von den beiden Scharen von »Koordinatenlinien« $u_1 =$ konst., bzw. $u_2 =$ konst. gebildet wird. Wird dies Raster hinreichend fein genommen, so ermöglicht es einem Zeichner, jede in der Bildebene gegebene Figur auf die krumme Fläche zu übertragen.

Der Abstand ds zweier unendlichnaher Punkte auf der Fläche:

$$(u_1, u_2) \qquad \text{und} \qquad (u_1 + du_1,\ u_2 + du_2)$$

bestimmt sich aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wenn man darin

$$(8) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2$$

und entsprechende Ausdrücke für dy, dz einsetzt. Es ergibt sich f
ds^2 eine quadratische Differentialform

$$(9) \qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}),$$

deren Koeffizienten

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_k}$$

im allgemeinen keine Konstante, sondern Funktionen von u_1, u_2 sin
Für die Parameterdarstellung (6) der Kugel findet man z. B.

$$(10) \qquad ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}.$$

Gauß erkannte, daß diese metrische Fundamentalform bestimmend ist
die *Geometrie auf der Fläche.* Kurvenlängen, Winkel und die Grö
gegebener Gebiete auf der Fläche hängen allein von ihr ab; die G
metrie auf zwei Flächen ist also dieselbe, wenn für sie bei geeigne
Parameterdarstellung die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamen
form übereinstimmen. Beweis: Die Länge einer beliebigen durch
gegebenen Kurve auf der Fläche wird geliefert durch das Integral

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{ik} g_{ik} \frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}} \cdot dt.$$

Fassen wir einen bestimmten Punkt $P^0 = (u_1^0, u_2^0)$ auf der Fläche
Auge und benutzen für dessen unmittelbare Umgebung die relati
Koordinaten

$$u_i - u_i^0 = du_i; \qquad x - x^0 = dx, \quad y - y^0 = dy, \quad z - z^0 = dz,$$

so gilt um so genauer, je kleiner du_1, du_2, die Gleichung (8), in der
Werte der Ableitungen an der Stelle P^0 zu nehmen sind; wir sagen,
gilt für »unendlichkleine« Werte du_1 und du_2. Fügen wir die analo
Gleichungen für dy, dz hinzu, so drücken sie aus, daß die unmittel
Umgebung von P^0 eine Ebene ist und du_1, du_2 affine Koordinaten
ihr*). Demnach können wir in der unmittelbaren Umgebung von

---

*) Dabei machen wir die Voraussetzung, daß die zweireihigen Determina
welche aus dem Koeffizientenschema dieser Gleichungen gebildet werden könne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix},$$

nicht alle drei verschwinden; diese Bedingung ist für die regulären Punkte der Fl
in denen eine Tangentenebene existiert, erfüllt. Die drei Determinanten sind

die Formeln der affinen Geometrie anwenden. Wir finden für den Winkel θ zweier Linienelemente oder infinitesimaler Verschiebungen mit den Komponenten du_1, du_2, bzw. δu_1, δu_2, wenn wir die zu (9) gehörige symmetrische Bilinearform

$$\sum_{ik} g_{ik}\, du_i \delta u_k \quad \text{mit} \quad Q(d\delta)$$

bezeichnen:

$$\cos\theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd)\,Q(\delta\delta)}};$$

und für den Flächeninhalt des unendlichkleinen Parallelogramms, das von diesen beiden Verschiebungen aufgespannt wird,

$$\sqrt{g}\begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix},$$

wenn g die Determinante der g_{ik} bedeutet. Der Inhalt eines krummen Flächenstücks ist demnach gegeben durch das über das Bildgebiet zu erstreckende Integral

$$\int\!\!\int \sqrt{g}\, du_1\, du_2 .$$

Damit ist die Gaußsche Behauptung erwiesen. Die Werte der erhaltenen Ausdrücke sind natürlich unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung; diese ihre Invarianz gegenüber beliebigen Transformationen der Parameter kann analytisch ohne weiteres bestätigt werden. Alle geometrischen Verhältnisse auf der Fläche können wir im »Bilde« verfolgen; die Geometrie in der Bildebene fällt mit der Geometrie auf der krummen Fläche zusammen, wenn wir nur übereinkommen, unter dem Abstand ds zweier unendlich naher Punkte nicht den durch die Pythagoreische Formel

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2$$

gelieferten Wert zu verstehen, sondern (9).

Die Geometrie auf der Fläche handelt von den inneren Maßverhältnissen der Fläche, die ihr unabhängig davon zukommen, in welcher Weise sie in den Raum eingebettet ist; es sind diejenigen Beziehungen, welche durch *Messen auf der Fläche selbst* festgestellt werden können. Gauß ging bei seinen flächentheoretischen Untersuchungen von der praktischen geodätischen Arbeit der Hannoverschen Landesvermessung aus. Daß die Erde keine Ebene ist, kann durch die Vermessung eines hinreichend großen Stücks der Erdoberfläche selbst ermittelt werden; wenn auch das einzelne Dreieck des Triangulationsnetzes so klein genommen wird, daß an ihm die Abweichung von der Ebene nicht in Betracht fällt, so könnten sich doch die einzelnen Dreiecke nicht in der Weise in der Ebene zu einem Netz zusammenschließen, wie sie es auf der Erdoberfläche tun. Um das

---

und nur dann identisch 0, wenn die Fläche in eine Kurve ausartet, nämlich die Funktionen x, y, z von u_1 und u_2 in Wahrheit nur von *einem* Parameter, einer Funktion von u_1 und u_2, abhängen.

noch etwas deutlicher darzutun, zeichne man auf einer Kugel vom Radius 1 (der Erdkugel) einen Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem auf der Kugel gelegenen Mittelpunkt P; ferner die Radien dieses Kreises, d. h. die von P ausstrahlenden und an der Kreisperipherie endenden Bogen größter Kreise auf der Kugel $\left(\text{sie seien} < \frac{\pi}{2}\right)$. Durch Messen auf der Kugel kann ich nun feststellen: diese nach allen Richtungen ausgehenden Radien sind die Linien kleinster Länge, welche vom Punkte P zu der Kurve $\mathfrak{k}$ führen; sie haben alle die gleiche Länge r; die Länge der geschlossenen Kurve $\mathfrak{k}$ ist $= s$. Läge nun eine Ebene vor, so folgte daraus, daß die »Radien« gerade Linien sind, die Kurve $\mathfrak{k}$ also ein Kreis, und es müßte $s = 2\pi r$ sein. Statt dessen aber findet sich, daß s kleiner ist, als es dieser Formel entspricht, nämlich $= 4\pi \sin \frac{r}{2}$. Damit ist durch Messung auf der Kuge festgestellt, daß sie keine Ebene ist. Nehme ich hingegen ein Papierblatt, auf das ich irgendwelche Figuren zeichne, und rolle es zusammen, so werde ich durch Ausmessen der Figuren auf dem zusammengerollte Blatt die gleichen Werte finden wie vorher, wenn das Zusammenrolle mit keinen Verzerrungen verbunden war: auf ihm gilt genau die gleich Geometrie wie in der Ebene; durch seine geodätische Vermessung b ich außerstande, festzustellen, daß es gekrümmt ist. So gilt allgeme auf zwei Flächen, die durch Verbiegung ohne Verzerrung auseinand hervorgehen, die gleiche Geometrie.

Daß auf der Kugel nicht die Geometrie der Ebene gilt, besagt, a lytisch ausgedrückt: es ist unmöglich, die quadratische Differentialform (durch irgend eine Transformation

$$u_1 = u_1(u_1^* u_2^*) \qquad u_1^* = u_1^*(u_1 u_2)$$
$$u_2 = u_2(u_1^* u_2^*) \qquad u_2^* = u_2^*(u_1 u_2)$$

auf die Gestalt

$$(du_1^*)^2 + (du_2^*)^2$$

zu bringen. Zwar wissen wir, daß es an jeder Stelle möglich ist, eine lineare Transformation der Differentiale

$$(11) \qquad du_i^* = \alpha_{i1}\, du_1 + \alpha_{i2}\, du_2 \qquad (i = 1, 2)$$

dies zu erzielen; aber es ist ausgeschlossen, die Transformatio Differentiale dabei an jeder Stelle so zu wählen, daß die Ausdrück für du_1^*, du_2^* *totale* Differentiale werden.

Krummlinige Koordinaten werden nicht nur in der Flächent sondern auch zur Behandlung *räumlicher Probleme* verwendet, nam in der mathematischen Physik, wo man häufig in die Notwendigk setzt ist, sich mit dem Koordinatensystem vorgegebenen Körpe zupassen; ich erinnere an die Zylinder-, Kugel- und elliptisch ordinaten. Das Quadrat des Abstandes ds^2 zweier unendlich bena

Punkte im Raum wird bei Benutzung beliebiger Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ stets durch eine quadratische Differentialform

$$(12) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

ausgedrückt. Glauben wir an die Euklidische Geometrie, so sind wir überzeugt, daß jene Form sich durch Transformation in eine solche Gestalt überführen läßt, daß ihre Koeffizienten Konstante werden.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Riemannschen Ideen, die von ihm in seinem Habilitationsvortrag »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen«[4]) in vollendeter Form entwickelt wurden, voll zu erfassen. Aus Kap. I ist zu ersehen, daß in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum auf einem dreidimensionalen *linearen* Punktgebilde die Euklidische Geometrie gilt; aber krumme dreidimensionale Räume, die im vierdimensionalen Raum ebensogut existieren wie krumme Flächen im dreidimensionalen, sind von anderer Art. Ist es nicht möglich, daß unser dreidimensionaler Anschauungsraum ein solcher gekrümmter Raum ist? Freilich: er ist nicht eingebettet in einen vierdimensionalen; aber es könnte sein, daß seine inneren Maßverhältnisse solche sind, wie sie in einem »ebenen« Raum nicht stattfinden können; es könnte sein, daß eine sorgfältige geodätische Vermessung unseres Raumes in der gleichen Weise wie die geodätische Vermessung der Erdoberfläche ergäbe, daß er nicht eben ist. — Wir bleiben dabei, daß er eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist; wir bleiben dabei, daß sich unendlichkleine Linienelemente unabhängig von ihrem Ort und ihrer Richtung messend miteinander vergleichen lassen und daß das Quadrat ihrer Länge, des Abstandes zweier unendlich benachbarter Punkte bei Benutzung beliebiger Koordinaten x_i durch eine quadratische Differentialform (12) gegeben wird. (Diese Voraussetzung hat in der Tat allgemein ihren guten Sinn; denn da jede Transformation von einem auf ein anderes Koordinatensystem *lineare* Transformationsformeln für die Koordinatendifferentiale nach sich zieht, geht dabei eine quadratische Differentialform immer wieder in eine quadratische Differentialform über.) Was wir aber nicht mehr voraussetzen, ist, daß sich diese Koordinaten insbesondere als affine Koordinaten so wählen lassen, daß die Koeffizienten g_{ik} der Fundamentalform konstant werden.

Der Übergang von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie beruht im Grunde auf dem gleichen Gedanken wie die Nahewirkungs-Physik. Durch die Beobachtung stellen wir z. B. fest (Ohmsches Gesetz), daß der in einem Leitungsdraht fließende Strom proportional ist zu der Potentialdifferenz am Anfang und Ende der Leitung. Aber wir sind überzeugt, daß wir nicht in diesem auf einen langen Draht sich beziehenden Messungsergebnis das allgemein gültige exakte Naturgesetz vor uns haben, sondern dieses aus jenem sich herleitet, indem wir das Ohmsche Gesetz, so wie es aus den Messungen abgelesen wird, auf ein *unendlichkleines*

Drahtstück anwenden. Dann kommen wir zu jener Formulierung (Kap. I, S. 68), die der Maxwellschen Theorie zugrunde gelegt wird. Aus dem Differentialgesetz folgt rückwärts auf mathematischem Wege *unter Voraus setzung überall homogener Verhältnisse* das Integralgesetz, das wir direk durch die Beobachtung feststellen. Genau so hier: Die Grundtatsach der Euklidischen Geometrie ist, daß das Quadrat der Entfernung zwei Punkte eine quadratische Form der relativen Koordinaten der beid Punkte ist (*Pythagoreischer Lehrsatz*). *Sehen wir aber dieses Gesetz n dann als streng gültig an, wenn jene beiden Punkte unendlich benachba sind, so kommen wir zur Riemannschen Geometrie;* zugleich sind wir dan einer genaueren Festlegung des Koordinatenbegriffs überhoben, da das gefaßte Pythagoreische Gesetz invariant ist gegenüber beliebigen Tra formationen. Es entspricht der Übergang von der Euklidischen »Fen zur Riemannschen »Nahe«-Geometrie demjenigen von der Fernwirkun zur Nahewirkungs-Physik; die Riemannsche Geometrie ist die dem Ge der Kontinuität gemäß formulierte Euklidische, sie nimmt aber dı diese Formulierung sogleich einen viel allgemeineren Charakter an. Euklidische Fern-Geometrie ist geschaffen für die Untersuchung der ger Linie und der Ebene, an diesen Problemen hat sie sich orientiert; so man aber zur Infinitesimalgeometrie übergeht, ist es das Natürlichste Vernünftigste, den infinitesimalen Ansatz Riemanns zugrunde zu le es wird dadurch keine Komplikation bedingt, und man ist vor un gemäßen, fern-geometrischen Überlegungen geschützt. Auch im Rien schen Raum ist eine Fläche als zweidimensionale Mannigfaltigkeit eine Parameterdarstellung $x_i = x_i(u_1 u_2)$ gegeben; setzen wir die d sich ergebenden Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2$$

in die metrische Fundamentalform (12) des Riemannschen Raum so bekommen wir für das Quadrat des Abstandes zweier unendli nachbarter Flächenpunkte eine quadratische Differentialform von d (wie im Euklidischen Raum): die Metrik des dreidimensionalen Ri schen Raums überträgt sich unmittelbar auf jede in ihm gelegene und macht sie damit zu einem zweidimensionalen Riemannschen Während also bei Euklid der Raum von vornherein von viel spe Natur angenommen ist als die in ihm möglichen Flächen, näm eben, hat bei Riemann der Raumbegriff gerade denjenigen G Allgemeinheit, der nötig ist, um diese Diskrepanz völlig zum Ve den zu bringen. — *Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten endlichkleinen zu verstehen,* ist das treibende erkenntnistheoretisc der Nahewirkungsphysik wie der Riemannschen Geometrie, ist a das treibende Motiv in dem übrigen, vor allem auf die komple tionentheorie gerichteten grandiosen Lebenswerk Riemanns. I scheint uns die Frage nach der Gültigkeit des »V. Postulats«,

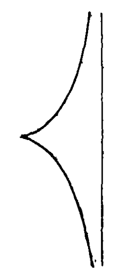
die historische Entwicklung, an die Euklidischen »Elemente« anknüpfend, ausgegangen ist, nur als ein bis zu einem gewissen Grade zufälliger Ansatzpunkt. Die wahre Erkenntnis, zu der man sich erheben mußte, um über den Euklidischen Standpunkt hinauszugelangen, glauben wir, ist uns von Riemann aufgedeckt worden.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie so gut wie die Euklidische und die sphärische (auf die als eine Nicht-Euklidische Möglichkeit übrigens erst Riemann hingewiesen hat) als spezielle Fälle in der Riemannschen enthalten sind. In der Tat, benutzen wir als Koordinaten eines Punktes der Bolyai-Lobatschefskyschen Ebene die rechtwinkligen Koordinaten $u_1\, u_2$ jenes Bildpunktes, der ihm in dem Kleinschen Modell entspricht, so ergibt sich für den Abstand ds zweier unendlich benachbarter Punkte aus (1):

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{(1 - u_1^2 - u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + (u_1\, du_1 + u_2\, du_2)^2}{(1 - u_1^2 - u_2^2)^2}.$$

Der Vergleich mit (10) bestätigt wiederum den Satz von Taurinus. Die metrische Fundamentalform des dreidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumes lautet genau entsprechend.

Wenn wir im Euklidischen Raum eine krumme Fläche herstellen können, für die bei Benutzung geeigneter Gaußscher Koordinaten $u_1\, u_2$ die Formel (13) gültig ist, so besteht auf ihr die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie. Solche Flächen kann man sich in der Tat verschaffen; die einfachste ist die Umdrehungsfläche der Traktrix. Die Traktrix ist eine ebene Kurve von der nebenstehenden Gestalt, mit einer Spitze und einer Asymptote; sie ist geometrisch dadurch charakterisiert, daß die Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der Asymptote eine konstante Länge besitzt. Man lasse sie um ihre Asymptote rotieren: auf der entstehenden Drehfläche gilt die Nicht-Euklidische Geometrie. Dieses durch seine Anschaulichkeit ausgezeichnete Euklidische Modell derselben ist zuerst von Beltrami angegeben[5]). Es leidet freilich an gewissen Übelständen; es ist erstens (in dieser anschaulichen Form) auf die zweidimensionale Geometrie beschränkt, und zweitens realisiert jede der beiden Hälften der Umdrehungsfläche, in welche sie durch ihre scharfe Kante zerfällt, nur einen Teil der Nicht-Euklidischen Ebene. Von Hilbert wurde streng bewiesen, daß eine singularitätenfreie Fläche im Euklidischen Raum, welche die ganze Lobatschefskysche Ebene realisiert, nicht vorhanden sein kann[6]). Beide Übelstände besitzt das elementargeometrische Kleinsche Modell nicht.


Fig. 5.

Bislang sind wir rein spekulativ vorgegangen und ganz in der Domäne des Mathematikers geblieben. Ein anderes ist aber die Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie, ein anderes *die Frage, ob sie oder die Euklidische im wirklichen Raume Gültigkeit besitzt.* Schon Gauß hat

zur Prüfung dieser Frage das Dreieck Inselsberg, Brocken, Hoher Hag (bei Göttingen) mit großer Sorgfalt gemessen, aber die Abweichung d Winkelsumme von 180° innerhalb der Fehlergrenzen gefunden. Lob tschefsky schloß aus dem geringen Betrag der Fixsternparallaxen, d die Abweichung des wirklichen Raumes vom Euklidischen außerordentli gering sein müsse. Auf philosophischer Seite ist der Standpunkt v treten worden, daß durch empirische Beobachtungen die Gültigkeit o Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie nicht erwiesen werden kön Und in der Tat muß zugestanden werden, daß bei allen solchen Be achtungen wesentlich physikalische Voraussetzungen, wie etwa die, d die Lichtstrahlen gerade Linien sind, und dgl., eine Rolle spielen. finden damit aber lediglich eine schon oben gemachte Bemerkung stätigt, daß nur das Ganze von Geometrie und Physik einer empirisch Nachprüfung fähig ist. Entscheidende Experimente sind also erst d möglich, wenn nicht nur die Geometrie, sondern auch die Physik Euklidischen *und* im allgemeinen Riemannschen Raum entwickelt Wir werden bald sehen, daß es auf sehr einfache und völlig willkürl Weise gelingt, beispielsweise die Gesetze des elektromagnetischen Fel die zunächst nur unter der Voraussetzung der Euklidischen Geome aufgestellt sind, auf den Riemannschen Raum zu übertragen. Ist aber geschehen, so kann sehr wohl die Erfahrung darüber entschei ob der spezielle Euklidische Standpunkt aufrecht zu erhalten ist oder wir zu dem allgemeineren Riemannschen übergehen müssen. Wir se aber, daß für uns an dem Punkte, an dem wir jetzt stehen, diese F noch nicht spruchreif ist.

Zum Schluß stellen wir noch einmal die Grundlagen der Riem schen Geometrie in geschlossener Formulierung und unter Abstrei der speziellen Dimensionszahl $n = 3$ vor Augen.

Ein n-dimensionaler Riemannscher Raum ist eine n-dimensionale Ma faltigkeit; aber nicht eine beliebige, sondern eine solche, der durch positiv-definite quadratische Differentialform eine Maßbestimmung aufge ist. Die beiden Hauptgesetze, nach denen jene Form die Maßgr festlegt, sind die folgenden (die x_i bedeuten irgendwelche Koordina

1. Ist g die Determinante der Koeffizienten der Fundamental so ist die Größe irgend eines Raumstücks gegeben durch das Integ

$$\int \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,, \tag{14}$$

das zu erstrecken ist über dasjenige mathematische Gebiet der Variabl welches dem Raumstück entspricht.

2. Bedeutet $Q(d\delta)$ die der quadratischen Fundamentalform en chende symmetrische Bilinearform zweier an derselben Stelle befindl Linienelemente d und δ, so ist der von ihnen gebildete Winkel berechnen aus

$$\cos\theta = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd)\cdot Q(\delta\delta)}}\,. \tag{15}$$

Eine in dem n-dimensionalen Raum liegende m-dimensionale Mannigfaltigkeit ($1 \leqq m \leqq n$) ist gegeben durch eine Parameterdarstellung:

$$x_i = x_i(u_1 u_2 \ldots u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der metrischen Fundamentalform des Raumes entsteht durch Einsetzen der Differentiale

$$d x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} d u_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} d u_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} d u_m$$

die metrische Fundamentalform dieser m-dimensionalen Mannigfaltigkeit; sie ist damit selber ein Riemannscher m-dimensionaler Raum, und die Berechnung der Größe eines beliebigen Stücks von ihr geschieht nach der auf sie übertragenen Formel (14). So kann die Länge von Linienstücken, der Inhalt von Flächenstücken usw. ermittelt werden.

§ 12. Fortsetzung. Dynamische Auffassung der Metrik.

Wir kehren noch einmal zur Flächentheorie im Euklidischen Raum zurück. Die *Krümmung* einer ebenen Kurve kann als Maß dafür, wie stark die Kurvennormalen divergieren, in folgender Weise definiert werden. Wir tragen den zur Kurve in einem beliebigen Punkte P senkrecht stehenden Vektor »Normale« von der Länge 1 von einem festen Punkt O aus ab: Op, und erhalten dadurch einen Bildpunkt p zu P auf dem Einheitskreis um O. Durchläuft P ein kleines Bogenstück Δs der Kurve, so wird der Bildpunkt p einen Bogen $\Delta \sigma$ jenes Kreises durchlaufen; $\Delta \sigma$ ist der ebene Winkel, welchen die in den sämtlichen Punkten des Kurvenbogens errichteten Normalen miteinander bilden.

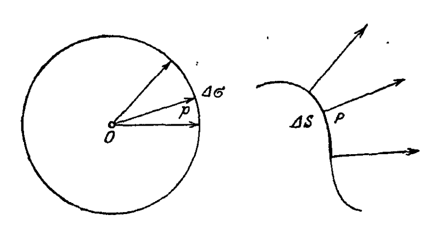


Fig. 6.

Der Limes des Quotienten $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$ für ein Bogenstück Δs, das auf einen Punkt P zusammenschrumpft, ist die Krümmung in P. Ganz analog definiert Gauß die Krümmung einer Fläche als Maß der Divergenz ihrer Normalen. Anstelle des Einheitskreises um O tritt die Einheitskugel; einem kleinen Flächenstück do entspricht durch das gleiche Abbildungsprinzip ein Stück dieser Kugel $d\omega$; $d\omega$ ist gleich dem räumlichen Winkel, welchen die in den Punkten von do errichteten Normalen miteinander bilden. Das Verhältnis $\frac{d\omega}{do}$ in der Grenze für unendlichkleines do ist die *Gaußsche Krümmung. Gauß machte die wichtige Entdeckung, daß diese Krümmung durch die inneren Maßverhältnisse der Fläche allein bestimmt ist und aus den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform als ein Differential-*

ausdruck 2. Ordnung berechnet werden kann. Die Krümmung bleibt demnach ungeändert, wenn man die Fläche verbiegt, ohne sie zu verzerren. Damit war auf geometrischem Wege eine *Differentialinvariante der quadratischen Differentialformen* von zwei Variablen entdeckt, eine Größe nämlich, die aus den Koeffizienten der Differentialform in solcher Weise gebildet ist, daß sie für zwei Differentialformen, die durch Transformation auseinander hervorgehen (und für Argumentpaare, die sich durch die Transformation entsprechen) gleiche Werte besitzt.

Riemann gelang es, den Begriff der Krümmung auf quadratische Differentialformen von drei und mehr Variablen zu übertragen; es stellte sich heraus, daß sie dann kein Skalar mehr ist, sondern ein Tensor (mit dem wir uns in § 16 dieses Kapitels beschäftigen werden). Genauer verhält es sich so, daß ein Riemannscher Raum an jeder Stelle in jeder Flächenrichtung eine bestimmte Krümmung besitzt. Der Euklidische Raum ist dadurch charakterisiert, daß er überall und in jeder Richtung die Krümmung 0 besitzt. Für die Bolyai-Lobatschefskysche wie für die sphärische Geometrie aber besitzt die Krümmung einen von Ort und Flächenrichtung unabhängigen konstanten Wert a; und zwar einen positiven im Falle der sphärischen, einen negativen im Falle der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie (sie kann also, wenn die Einheit des Längenmaßes geeignet gewählt wird, $= \pm 1$ angenommen werden). Hat der n-dimensionale Raum die konstante Krümmung a, so hat seine metrische Fundamentalform bei Einführung geeigneter Koordinaten x_i notwendig die Gestalt

$$\frac{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right)\cdot\sum_i dx_i^2 - a\left(\sum_i x_i\,dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i x_i^2\right)^2};$$

sie ist also vollständig eindeutig bestimmt. Ist der Raum überall i allen Richtungen homogen, so muß seine Krümmung eine Konstante sei und seine metrische Fundamentalform demnach die angegebene Gesta besitzen: ein solcher Raum ist notwendig Euklidisch, sphärisch od Lobatschefskysch. Unter diesen Umständen haben nicht nur die Linie elemente eine von Ort und Richtung unabhängige Existenz, sondern ei beliebige, endlich ausgedehnte Figur kann kongruent ohne Änderung ih Maßverhältnisse an einen beliebigen Ort verpflanzt und in eine belieb Richtung gestellt werden. Damit kehren wir zu dem Begriff der k gruenten Abbildung zurück, von dem unsere Betrachtungen über Raum in § 1 ihren Ausgang nahmen. Innerhalb der drei möglic Fälle ist der Euklidische dadurch charakterisiert, daß sich aus der Gru der kongruenten Abbildungen die Gruppe der Translationen mit den sonderen, in § 1 auseinandergesetzten Eigenschaften heraushebt. hier zusammengestellten Tatsachen sind in Riemanns Vortrag kurz wähnt, von Christoffel, Lipschitz, Helmholtz und Sophus Lie eingehe begründet worden.[7])

Der Raum ist Form der Erscheinungen und, sofern er das ist, notwendig homogen. Damit scheint es, als ob aus der ganzen Fülle der möglichen Geometrien, welche der Riemannsche Begriff umfaßt, von vornherein nur die erwähnten drei speziellen Fälle in Betracht kämen und alle übrigen als bedeutungslos unbesehen fallen gelassen werden müßten: parturiunt montes, nascetur ridiculus mus! Riemann dachte darüber anders, die Schlußworte seines Vortrags geben darüber Auskunft. Sie konnten von seinen Zeitgenossen in ihrer Tragweite nicht verstanden werden und sind damals ungehört verhallt. Erst heute, nachdem uns Einstein durch seine Gravitationstheorie die Augen geöffnet hat, sehen wir, was eigentlich dahinter steckt. Zu ihrem Verständnis bemerke ich vorweg, daß Riemann dort den *kontinuierlichen* Mannigfaltigkeiten die *diskreten*, aus einzelnen isolierten Elementen bestehenden gegenüberstellt. Das Maß eines jeden Teiles einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch die *Anzahl* der zu ihm gehörigen Elemente gegeben. So trägt eine diskrete Mannigfaltigkeit zufolge des Anzahlbegriffs das Prinzip ihrer Maßbestimmung, wie Riemann sagt, a priori in sich. Nun zu Riemanns eigenen Worten:

»Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, *in darauf wirkenden bindenden Kräften*, gesucht werden.

»Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführte von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

»Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.« —

Sehen wir von der ersten Möglichkeit ab, es könnte »das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden« — obschon wir es durchaus nicht abschwören wollen, heute im Angesicht der Quantentheorie weniger denn je, daß darin vielleicht einmal die endgültige Lösung des Raumproblems gefunden werden kann —, so leugnet Riemann also, was bis dahin immer die Meinung gewesen war,

daß die Metrik des Raumes von vornherein unabhängig von den physi kalischen Vorgängen, deren Schauplatz er abgibt, festgelegt sei und da Reale in diesen metrischen Raum wie in eine fertige Mietskaserne ein ziehe; *er behauptet vielmehr, daß der Raum an sich nichts weiter als ein völlig formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist und erst der den Raun erfüllende materiale Gehalt ihn gestaltet und seine Maßverhältnisse be stimmt.* Es bleibt die Aufgabe, zu ermitteln, nach welchen Gesetzen dies geschieht; jedenfalls aber wird sich die metrische Fundamentalforn im Laufe der Zeit ändern, wie sich das Materiale in der Welt ändert Wir wollen diesen kühnen Gedanken etwas genauer erläutern und zeigen daß, wenn diese Ansicht zutrifft, irgend zwei Raumstücke, die durc stetige Deformation ineinander übergeführt werden können, als kongruen bezeichnet werden müssen in dem von uns zugrunde gelegten Sinne, da derselbe materiale Gehalt so gut das eine Raumstück wie das ander erfüllen kann.

Zur Vereinfachung unserer prinzipiellen Auseinandersetzung nehme wir an, daß das Materiale allein durch skalare Zustandsgrößen wie Massen dichte, Ladungsdichte usw. beschrieben werden kann. Wir fassen eine bestimmten Moment ins Auge; in ihm wird die Ladungsdichte ϱ z. I bei Zugrundelegung eines bestimmten räumlichen Koordinatensystems ei bestimmte Funktion $f(x_1 x_2 x_3)$ der Koordinaten x_i sein, bei Benutzu eines andern Koordinatensystems x_i^* aber durch eine andere Funkti $f^*(x_1^* x_2^* x_3^*)$ dargestellt werden. — Eine Zwischenbemerkung. Es er springt bei Anfängern daraus oft Verwirrung, daß sie nicht beachten: der mathematischen Literatur werden die Buchstaben durchweg zur B zeichnung der *Funktionen* benutzt, in der physikalischen und auch math matisch-physikalischen durchweg zur Bezeichnung der »*Größen*«. gebraucht man in der Thermodynamik etwa für die Energie eines Ga einen bestimmten Buchstaben, sagen wir E, einerlei ob man sie Funktion von Druck p und Temperatur ϑ oder als Funktion des Vo mens v und der Temperatur ϑ auffaßt. Der Mathematiker aber schre mit zwei verschiedenen Zeichen:

$$E = \Phi(p, \vartheta) = \Psi(v, \vartheta).$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}$, die eine ganz verschiedene Bed tung haben, treten infolgedessen in den Physikbüchern unter der geme samen Bezeichnung $\frac{\partial E}{\partial \vartheta}$ auf; es muß dann aber durch einen angehäng Index (nach dem Vorgang von Boltzmann) oder durch hinzugefügte T worte angegeben werden, daß im einen Falle bei der Differentiation im andern Falle v konstant gehalten wird. Die mathematische Symb ist ohne solchen Zusatz eindeutig*). — Wir legen weiter, obschon

*) Es soll hier natürlich an der »physikalischen« Bezeichnungsart durchaus k Kritik geübt werden; sie ist den Zwecken der mit *Größen* operierenden Physik w angemessen.

die Dinge in Wirklichkeit komplizierter verhalten, eine möglichst einfache geometrische Optik zugrunde, deren Grundgesetz besagt: der Lichtstrahl von einem Licht aussendenden Punkt M zu einem Beobachter in P ist eine »geodätische« Linie, die unter allen Verbindungslinien von M mit P die geringste Länge besitzt; von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehen wir ganz ab. Dem auffassenden Bewußtsein schreiben wir lediglich ein optisches Wahrnehmungsvermögen zu und vereinfachen es uns zu einem »Punktauge«, das die Richtungsunterschiede der auftreffenden Lichtstrahlen, welche durch die aus (15) zu bestimmenden Winkel θ gegeben werden, unmittelbar wahrnimmt und dadurch ein *Richtungsbild* der umgebenden Gegenstände gewinnt (wir ignorieren die Qualitäten der Farbe). Nicht nur die Wirkung der physischen Dinge aufeinander, sondern auch die psychophysische Wechselwirkung wird von dem Gesetz der Kontinuität beherrscht: die Richtung, in der wir Gegenstände wahrnehmen, ist nicht durch deren Ort bestimmt, sondern durch die Richtung des von ihnen auf der Netzhaut auftreffenden Lichtstrahles; also durch den Zustand des optischen Feldes in der unmittelbaren Berührung mit dem Leibe jenes rätselhaften Realen, in dessen Wesen es liegt, daß ihm eine gegenständliche Welt in Bewußtseinserlebnissen »erscheint«. Daß aber ein materialer Gehalt G derselbe ist wie der materiale Gehalt G', kann offenbar nichts anderes heißen, als daß zu jedem Standpunkt P gegenüber G ein Standpunkt P' gegenüber G' gehört (und umgekehrt) derart, daß ein Beobachter in P' von G' das gleiche Richtungsbild empfängt, wie es ein Beobachter in P von G erhält.

Wir legen ein bestimmtes Koordinatensystem x_i zugrunde; die skalaren Zustandsgrößen wie die Elektrizitätsdichte ϱ stellen sich dar durch bestimmte Funktionen

$$\varrho = f(x_1\, x_2\, x_3)\,,$$

die metrische Fundamentalform sei

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

wo die g_{ik} gleichfalls (im Sinne der »mathematischen« Bezeichnungsweise) bestimmte Funktionen von $x_1\, x_2\, x_3$ bedeuten. Ferner sei irgend eine stetige Abbildung des Raumes auf sich selber gegeben, durch die jedem Punkt P ein Punkt P' zugeordnet ist. Unter Benutzung des vorliegenden Koordinatensystems und der Bezeichnungen

$$P = (x_1\, x_2\, x_3)\,, \qquad P' = (x'_1\, x'_2\, x'_3)$$

werde diese Abbildung dargestellt durch

$$(16) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1\, x_2\, x_3)\,.$$

Durch sie gehe ein Raumstück $\mathfrak{S}$ über in $\mathfrak{S}'$; ich will zeigen, daß in dem erläuterten Sinne $\mathfrak{S}'$ kongruent $\mathfrak{S}$ ist, falls Riemanns Ansicht zutrifft.

Ich benutze ein zweites Koordinatensystem, indem ich dem Punkte P die durch (16) gegebenen Zahlen x'_i als seine Koordinaten zuordne; (16)

sind dann die Transformationsformeln. Derjenige mathematische Bereic in drei Variablen, als welcher sich $\mathfrak{S}$ in den Koordinaten x' darstell ist identisch mit demjenigen, als welcher sich $\mathfrak{S}'$ in den Koordinaten darstellt. Ein beliebiger Punkt P hat in x' die gleichen Koordinaten wi P' in x. Ich denke mir nun den Raum auf eine zweite Weise durc einen materialen Gehalt erfüllt, und zwar so, wie es durch die Formel

$$\varrho = f(x'_1 x'_2 x'_3) \quad \text{im Punkte } P$$

und die analogen für die übrigen skalaren Größen dargestellt wird. Wen die Maßbestimmung des Raumes unabhängig von dem erfüllenden Mate rialen vorgegeben ist, wird die metrische Fundamentalform wie bei d ersten Erfüllung den Ausdruck haben:

$$\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{ik} g'_{ik}(x'_1 x'_2 x'_3)\, dx'_i\, dx'_k\,;$$

dabei ist auf der rechten Seite die Transformation auf das zweite Koo dinatensystem vollzogen. Wenn aber die Maßverhältnisse durch d materialen Gehalt bestimmt werden — und wir wollen jetzt mit Rieman annehmen, daß sich die Sache so verhält —, so wird, da die zweite E füllung sich genau so in den Koordinaten x' ausdrückt wie die erste den Koordinaten x, bei dieser zweiten Erfüllung die metrische Fund mentalform lauten:

$$\sum_{ik} g_{ik}\,(x'_1 x'_2 x'_3)\, dx'_i\, dx'_k\,.$$

Nach unserem Prinzip der geometrischen Optik wird dann einem Bec achter in P' der im Raumstück $\mathfrak{S}'$ bei der ersten Erfüllung vorhande Gehalt genau so erscheinen wie einem Beobachter in P das gemäß zweiten Erfüllung im Raumstück $\mathfrak{S}$ vorhandene Materiale. Trifft jedc die alte »Mietskasernen«-Auffassung zu, so ist das natürlich nicht der F

Die einfache Tatsache, daß ich eine Plastelinkugel in meiner Ha zu einer beliebigen Mißgestalt zerdrücken kann, die ganz anders aussi als eine Kugel, scheint den Riemannschen Standpunkt ad absurdum führen. Dies ist jedoch nicht beweisend; denn es wird wohl, wenn R mann recht hat, u. a. eine ganz andere Deformation der inneren atomistisc Struktur des Plastelins nötig sein, als ich durch meine Hand bewir kann, damit die verdrückte Gestalt einem Beobachter von allen Sei als kugelförmig erscheint.*) Einstein hat dem Riemannschen Gedan zum Siege verholfen (ohne freilich direkt durch Riemann beinflußt zu se von dem durch Einstein gewonnenen Standpunkt rückschauend aber kennen wir, daß dieser Gedanke zu einer gültigen Theorie erst ausgesta werden konnte, nachdem die *Zeit* als vierte zu den drei Raumdimensio in solcher Weise hinzugetreten war, wie es die sog. spezielle Relativit theorie lehrt. Da der Begriff »Kongruenz« nach Riemann überhaup keiner Metrik führt, auch nicht zu der durch eine quadratische Differen

*) Genaueres hierüber in Kap. IV.

form geregelten allgemeinen Riemannschen Metrik, so muß in der Tat »der innere Grund für die Maßverhältnisse« ganz wo anders gesucht werden. Er liegt nach Einstein in den »bindenden Kräften« der *Gravitation*. In der Einsteinschen Theorie (Kap. IV) spielen die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform die gleiche Rolle wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das Gravitationspotential; die Gesetze, nach denen das raumerfüllende Materiale die Metrik bestimmt, sind die Gravitationsgesetze. Das Gravitationsfeld bewirkt ein solches Verhalten der Lichtstrahlen und der »starren« Körper, die wir als Maßstäbe verwenden, daß sich, wenn wir die Maßstäbe und Lichtstrahlen in gewohnter Weise zur Ausmessung von Gegenständen benutzen, eine Maßgeometrie als gültig erweist, die in den der Beobachtung zugänglichen Gebieten sehr wenig von der Euklidischen abweicht. Die Maßverhältnisse kommen aber nicht auf Rechnung des Raumes als Form der Erscheinungen, sondern auf Rechnung des durch das Gravitationsfeld bestimmten physikalischen Verhaltens von Maßstäben und Lichtstrahlen.

Nach den durch Riemann gewonnenen Erkenntnissen blieb den Mathematikern nur der formale Ausbau seines geometrischen Gedankensystems als Aufgabe übrig; er ist von Christoffel, Ricci, Levi-Civita bewerkstelligt worden [8]). Die eigentliche Weiterführung hat er aber mit den letzten Worten deutlich genug in die Hände eines nach ihm kommenden, seinem mathematischen ebenbürtigen physikalischen Genies gelegt. Nach 70 Jahren ist das von ihm Prophezeite durch Einstein in Erfüllung gegangen. Bevor wir uns aber der Einsteinschen Theorie zuwenden können, bleibt uns noch ein weiter Weg zurückzulegen: wir müssen uns zunächst mit dem mathematischen Ausbau der Riemannschen Geometrie, insbesondere mit dem gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Tensorkalkül vertraut machen und dann, zu den Problemen der *Zeit* übergehend, die Lehren der speziellen Relativitätstheorie entwickeln.

§ 13. Bildung von Tensoren 1. Stufe durch Differentiation.

Wir beginnen damit, unter den allgemeineren Vorstellungen vom Raum, die wir uns gebildet haben, die Geometrie und Tensorrechnung zu begründen. Wir beschränken uns aber nicht auf die spezielle Dimensionszahl $n = 3$. Wir nehmen also an, die Lage jedes Punktes im Raume könne durch Angabe von n Koordinaten x_i charakterisiert werden; jede dieser Koordinaten ist eine stetige Ortsfunktion im Raum. Ist x_i^* irgend ein anderes System von n Koordinaten, so hängen die alten und neuen Koordinaten desselben Punktes gesetzmäßig durch stetige Tranformationsformeln

$$x_i = x_i\,(x_1^* x_2^* \ldots x_n^*) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

zusammen. Der Euklidische Raum ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihm auf Grund innerer Beziehungen, die zwischen den Punkten bestehen, der Koordinatenbegriff so spezialisiert werden kann, daß der Übergang

zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen durch *lineare* Transformationen dargestellt wird. Hier setzen wir nur voraus, daß der Koordinatenbegriff so weit eingeschränkt ist, daß die in den Transformationsformeln (17) auftretenden Funktionen von n Argumenten stetig differentiierbar sind und eine von 0 verschiedene Funktionaldeterminante besitzen. Das besagt, daß im Unendlichkleinen die n-dimensionale affin Geometrie gilt, daß nämlich zwischen den Differentialen umkehrbar-eindeutige lineare Transformationsformeln bestehen

$$(18) \qquad dx_i = \alpha_{i1}\,dx_1^* + \alpha_{i2}\,dx_2^* + \cdots + \alpha_{in}\,dx_n^*, \qquad \left(\alpha_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)$$

deren Koeffizienten α_{ik} aber keine Konstante sind, sondern stetig ver änderlich von Ort zu Ort. Genügt der Übergang von einem 1. zu einen 2. Koordinatensystem dieser Forderung, so auch der umgekehrte Über gang vom 2. zum 1.; genügt auch der Übergang vom 2. zu einem 3 Koordinatensystem dieser Forderung, so gleichfalls der Übergang vom 1 zum 3. Die Annahme einer solchen Einschränkung müssen wir machen damit das Operieren mit Differentialen überhaupt einen Sinn hat.

Ist P ein bestimmter Punkt mit den Koordinaten x_i, so haben w die Differentiale dx_i als die Komponenten einer *infinitesimalen Verschiebun* aufzufassen, die den Punkt P in den unendlich benachbarten Punkt m den Koordinaten $x_i + dx_i$ überführt. Die infinitesimalen Verschiebunge werden für die Entwicklung des Tensorkalküls die gleiche Rolle übe nehmen wie die Verschiebungen in Kap. I. Es ist aber zu beachten, d hier *eine Verschiebung wesentlich an einen Punkt P gebunden* ist, daß keinen Sinn hat, von den infinitesimalen Verschiebungen zweier verschi dener Punkte zu sagen, sie seien gleich oder ungleich. Man könnte freilich auf die Festsetzung verfallen, infinitesimale Verschiebungen zwei Punkte gleich zu nennen, wenn sie dieselben Komponenten haben; aber a dem Umstand, daß die α_{ik} in (18) keine Konstante sind, geht hervor, d wenn dies in einem Koordinatensystem der Fall ist, es in einem ande Koordinatensystem keineswegs zu gelten braucht. Wir können demna nur von der infinitesimalen Verschiebung eines *Punktes*, nicht aber v in Kap. I des ganzen Raumes sprechen; infolgedessen auch nicht v einem Vektor oder Tensor schlechthin, sondern von einem *Vektor* o *Tensor in einem Punkte P*. Wir verstehen darunter eine lineare, biline trilineare, ... Form einer oder zweier oder dreier ... willkürlicher finitesimaler Verschiebungen des Punktes P; eine solche Form hat Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems bestimmte Koeffizient welche die (kovarianten) *Tensorkomponenten* heißen. Die Möglichkeit die Begriffe beruht auf dem Umstande, daß der Übergang von einem z andern Koordinatensystem für die Differentiale in einer linearen Tra formation sich ausdrückt. Die ganze *Tensoralgebra* läßt sich jetzt v ständig ungeändert übertragen, wenn wir annehmen, daß im Punkt ein nicht-ausgearteter symmetrischer Tensor 2. Stufe als *metrischer Fun mentaltensor* ein für allemal gegeben ist. Wir setzen in der Tat vor

daß dies für jeden Punkt P der Fall ist, daß unserm Raum durch eine positiv-definite quadratische Differentialform

$$\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{19}$$

(mit stetigen Koeffizienten g_{ik}) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Wie früher können wir die infinitesimale Verschiebung eines Punktes P selber als einen Vektor in P betrachten, von dem die dx_i die kontravarianten Komponenten sind, während seine kovarianten durch $\sum_k g_{ik}\, dx_k$ bestimmt werden. Auch die *feinere Systematik* der Tensoren kann hier ungeändert benutzt werden. Ein *Tensorfeld*, z. B. ein Flächentensorfeld 2. Stufe im Raume ist gegeben, wenn jedem Punkte P ein *Tensor in* P von dieser Stufe zugeordnet ist. Benutzen wir zur analytischen Darstellung ein bestimmtes Koordinatensystem, so werden wir noch voraussetzen, daß die Tensorkomponenten stetige Funktionen der Koordinaten des Punktes P sind; zufolge der Annahme über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen ist dies eine invariante, vom Koordinatensystem unabhängige Voraussetzung*). Die Metrik beruht auf einem Linientensorfeld 2. Stufe.

Ist jedem Wert eines Parameters s ein Punkt $P = P(s)$ in stetiger Weise zugeordnet, so ist, wenn wir s als Zeit deuten, damit eine »Bewegung« gegeben; wir wollen diesen Namen in Ermanglung eines andern Ausdrucks in rein mathematischem Sinne auch dann anwenden, wenn wir uns einer solchen Deutung des Parameters s enthalten. Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems erhalten wir eine Darstellung

$$x_i = x_i(s) \tag{20}$$

der Bewegung durch n stetige Funktionen $x_i(s)$, von denen wir annehmen, daß sie nicht nur stetig, sondern stetig differentiierbar sind. Zugleich ist (20) eine Parameterdarstellung der »Bahnkurve« der Bewegung. Beim Übergang vom Parameterwert s zu $s + ds$ erfährt der zugehörige Punkt P eine infinitesimale Verschiebung mit den Komponenten dx_i. Dividieren wir diesen Vektor in P durch ds, so erhalten wir die »Geschwindigkeit«, einen Vektor in P mit den kontravarianten Komponenten $\frac{dx_i}{ds} = u^i$. Die Geschwindigkeit ist von Hause aus ein kontravarianter Vektor; erst auf Grund der Raummetrik können wir seine kovarianten Komponenten

$$u_i = \sum_k g_{ik} \frac{dx_k}{ds}$$

*) Bei Entwicklung der Tensoranalysis müssen wir übrigens nicht nur Stetigkeit, sondern auch Differentiierbarkeit der Komponenten postulieren, was weitergehende Einschränkungen des Koordinatenbegriffs verlangt; aber wir wollen uns nicht mit solchen Skrupeln aufhalten (wiewohl man sie keineswegs leicht zu nehmen hat; diese Schwierigkeiten entspringen aus der begrifflich dunklen Natur des Kontinuums).

bilden. Das Quadrat der Größe der Geschwindigkeit ist wie bei jedem Vektor durch die Invariante

$$\sum_{ik} g_{ik} u^i u^k = \sum_{ik} g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \left(= \sum_i u_i u^i = \sum_{ik} g^{ik} u_i u_k \right)$$

gegeben. Die Parameterdarstellung einer Kurve können wir insbesondere so wählen, daß diese Größe identisch in s gleich 1 wird; der Parameter s bedeutet dann die von irgendeinem Anfangspunkt auf der Kurve aus gerechnete Bogenlänge. Bei solcher Parameterwahl bezeichnen wir den Vektor Geschwindigkeit als die »Richtung« der Kurve.

Ist φ ein gegebenes Skalarfeld im Raum und bedeuten x_i und x_i^* irgend zwei Koordinatensysteme, so wird in dem einen und andern das Skalarfeld sich durch eine Funktion der x_i bzw. x_i^* darstellen:

$$\varphi = f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f^*(x_1^* x_2^* \ldots x_n^*).$$

Bilden wir den Zuwachs von φ bei einer infinitesimalen Verschiebung des Argumentpunktes, so kommt

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} dx_i^*.$$

Daraus geht hervor, daß die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die kovarianten Komponenten eines Linientensorfeldes 1. Stufe bilden, das in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Skalarfeld φ entspringt. Hier haben wir ein einfaches Beispiel zum Begriff Vektorfeld; zugleich zeigt sich, daß die Operation »grad« auch in der jetzt zu entwickelnden allgemeinen Tensoranalysis ihre Bedeutung behält, daß sie invarianten Charakter trägt nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Koordinatentransformationen.

Das ist aber allgemein mit dem in Kap. I, § 8 betrachteten Prozeß der »Differentiation« keineswegs der Fall, und die Tensoranalysis gestaltet sich im Riemannschen Raum etwas verwickelter als im Euklidischen. Sind z. B. f_i die kovarianten Komponenten eines Vektorfeldes, so nahmen wir damals einen willkürlichen Vektor mit den vom Orte unabhängigen (kontravarianten) Komponenten ξ^i zu Hilfe und bildeten den Gradienten von $\sum_i f_i \xi^i$; dies führte ohne weiteres deshalb zum Ziel, weil ein Vektor, der in *einem* Koordinatensystem konstante Komponenten besitzt, diese Eigenschaft in jedem anderen, das aus ihm durch *lineare* Transformation hervorgeht, behält. Hier trifft das aber nicht mehr zu.

Trotzdem wird uns auch jetzt dieses Verfahren gute Dienste leisten. Es steht in engster Beziehung zu dem von Cauchy begründeten *formalen Kalkül mit Differentialen*. Wir betrachten Funktionen $H(z_1 z_2 \ldots z_n)$ von n unabhängigen Variablen z_i. Nachdem wir ein willkürliches System von n Zahlen

$$d = (d^1, d^2, \ldots, d^n)$$

gewählt, definieren wir allgemein

$$dH = \frac{\partial H}{\partial z_1} d^1 + \frac{\partial H}{\partial z_2} d^2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial z_n} d^n.$$

Für dieses sog. »Differential«, das nun aber nichts mit »unendlichkleinen« Größen zu tun hat, gelten, wenn H, H' irgend zwei Funktionen der z_i sind und α eine Konstante, die Rechenregeln

(21)
$$d(H + H') = dH + dH', \quad d(\alpha H) = \alpha \cdot dH,$$
$$d(H \cdot H') = H \cdot dH' + H' \cdot dH.$$

Für die z_i selber gelten nach unsern Festsetzungen die Formeln $dz_i = d^i$. (21) sind spezielle Fälle des folgenden allgemeinen Gesetzes: wenn x_1, x_2, ..., x_m irgendwelche Funktionen von z sind, so ist das Differential einer irgendwie aus ihnen zusammengesetzten Funktion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(z_1, z_2, \ldots, z_n):$$

(22)
$$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Wählen wir ein zweites System von irgend n Zahlen

$$\delta = (\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^n),$$

so können wir, wie von der Funktion H das Differential δH, so von der Funktion dH der Argumente z das Differential

$$\delta\, dH = \sum_i \delta^i \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\sum_k \frac{\partial H}{\partial z_k} d^k\right) = \sum_{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_k} \delta^i d^k$$

bilden. Es ist, wie man sieht,

(23)
$$\delta dH = d\delta H.$$

Für unsere Zwecke können wir von diesem Kalkül folgenden Gebrauch machen. Wir gehen aus von einem bestimmten Koordinatensystem z_i. Die Koordinaten x_i irgend eines andern Systems sind zufolge der Transformationsformeln Funktionen der z. Die nach dem Cauchyschen Kalkül gebildeten Differentiale $dx_i = \xi^i$ sind laut Definition die kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes im x-Koordinatensystem, dessen Komponenten im z-System die *konstanten*, vom Orte unabhängigen Werte d^i haben. Hier haben wir den Anschluß an unser früheres Verfahren. Man kann die Zahlen d^i so wählen (auf eine und nur eine Weise), daß die dx_i an einer gegebenen Stelle P beliebige Werte erhalten. Bezeichnen die x_i^* ein anderes Koordinatensystem, so sind die x_i^* gleichfalls Funktionen der z, und ihre Cauchyschen Differentiale dx_i^* hängen mit den dx_i durch die Transformationsformeln (18) zusammen. — Wir leiten nochmals den Gradienten ab. Ist φ ein Skalarfeld, so sei

$$\varphi = \varphi(z_1 z_2 \cdots z_n) = f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f^*(x_1^* x_2^* \cdots x_n^*).$$

Die z_i nehmen wir als unabhängige Variable; dann ist im Sinne Cauchys nach (22):

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} dx_i^*.$$

Nun aber können wir weiter kommen. Liegt ein *Vektorfeld* vor, dessen kovariante Komponenten in z mit φ_i, in x mit f_i, in x^* mit f_i^* bezeichnet seien, so bilden wir die Invariante

$$d\varphi = \varphi_i d^i = f_i dx_i = f_i^* dx_i^*.$$

Dabei sind die z als unabhängige Variable und die Bezeichnungen im Cauchyschen Sinne zu nehmen; auch soll von jetzt ab unsere alte Festsetzung über Fortlassung von Summenzeichen wieder in Kraft treten. Wir bilden

$$\begin{aligned}\delta d\varphi &= \delta f_i \cdot dx_i + f_i \delta dx_i \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + f_i \delta dx_i.\end{aligned}$$

Das Auftreten des zweiten Gliedes auf der rechten Seite ist wichtig. Wir bekommen also die Gleichung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k + f_i \delta dx_i = \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k^*} dx_i^* \delta x_k^* + f_i^* \delta dx_i^*.$$

In dieser Gestalt liefert sie uns eben wegen jenes störenden Terms mit den Differentialen 2. Ordnung, deren Sinn durchaus von dem zugrunde gelegten System der unabhängigen Variablen z abhängt, keine Invariante. Bilden wir aber in der gleichen Weise $d\delta\varphi$ und subtrahieren, so folgt wegen

$$\delta dx_i = d\delta x_i, \qquad \delta dx_i^* = d\delta x_i^*:$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) dx_i \delta x_k = \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial x_k^*} - \frac{\partial f_k^*}{\partial x_i^*}\right) dx_i^* \delta x_k^*.$$

Hier ist nun das Koordinatensystem der unabhängigen Variablen eliminiert, und wir erkennen, daß

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

die kovarianten Komponenten eines Flächentensors 1. Stufe sind, der aus dem gegebenen Linientensor 1. Stufe auf eine vom Koordinatensystem unabhängige Weise hervorgeht: die rot ist gegenüber beliebigen Transformationen, nicht nur gegenüber linearen, invariant.

Auf die gleiche Art können wir die nächste Stufe erklimmen. Es liege das Feld eines Flächentensors 1. Stufe vor; seine kovarianten Komponenten in z, x und x^* seien φ_{ik}, f_{ik}, f_{ik}^*. Wir gehen aus von der Invariante

$$\delta d\varphi = \varphi_{ik} d^i \delta^k = f_{ik}\, dx_i \delta x_k = f_{ik}^* dx_i^* \delta x_k^*$$

und bilden für ein drittes System konstanter Größen ($\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^1, \mathfrak{d}^2, \ldots, \mathfrak{d}^n$):

$$(24) \qquad \mathfrak{d}\delta d\varphi = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} dx_i \delta x_k \mathfrak{d} x_l + (f_{ik} \mathfrak{d} dx_i \delta x_k + f_{ik}\, dx_i \mathfrak{d}\delta x_k).$$

Nehmen wir hier die drei zyklischen Vertauschungen der Differentiale d, δ und $\mathfrak{d}$ vor und addieren, so kommt unter geeigneter Änderung der Indizesbezeichnung

$$\mathfrak{d}\delta d\varphi + d\mathfrak{d}\delta\varphi + \delta d\mathfrak{d}\varphi = \left(\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}\right) dx_i \delta x_k \mathfrak{d} x_l,$$

da die sechs Summanden, welche aus den in (24) eingeklammerten Zusatzgliedern entspringen, wegen der Relationen

$$f_{ki} = -f_{ik},$$
$$\delta d x_i = d \delta x_i, \qquad \mathfrak{d} \delta x_i = \delta \mathfrak{d} x_i, \qquad d \mathfrak{d} x_i = \mathfrak{d} d x_i$$

sich zu je zweien gegenseitig zerstören. Daher ist

$$\left(\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}\right) dx_i \, \delta x_k \, \mathfrak{d} x_l = \left(\frac{\partial f^*_{kl}}{\partial x^*_i} + \frac{\partial f^*_{li}}{\partial x^*_k} + \frac{\partial f^*_{ik}}{\partial x^*_l}\right) dx^*_i \, \delta x^*_k \, \mathfrak{d} x^*_l,$$

und wir sehen, daß

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}$$

die kovarianten Komponenten eines Raumtensorfeldes 1. Stufe bilden, das in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise aus dem Flächentensorfeld entspringt.

Man beachte, wie sich hier die feinere Systematik der Tensoren bewährt. Die dargelegte Methode führt uns zu der Differentialanalysis der (Linien-, Flächen-, Raum-, ...) Tensoren *1. Stufe*, aber nicht weiter. Für diesen Teil der Tensoranalysis ist es charakteristisch, daß sie noch von jeder Metrik des Raumes unabhängig ist; der metrische Fundamentaltensor g_{ik} tritt überhaupt nicht auf. Für die übrigen Operationen der Tensoranalysis trifft das nicht mehr zu; in sie gehen die g_{ik} oder vielmehr deren Ableitungen in eigentümlicher Weise ein, eine Erscheinung, die naturgemäß in dem »linearen« Tensorkalkül, in welchem die g_{ik} vom Orte unabhängige Konstante sind, noch nicht zur Geltung kommt.

§ 14. Geodäsie im Riemannschen Raum.

Die geradlinigen Koordinaten in der Euklidischen Geometrie sind wesentlich dadurch gekennzeichnet, daß bei ihrer Benutzung die metrische Fundamentalform konstante Koeffizienten g_{ik} bekommt. In der allgemeinen Riemannschen Geometrie existiert ein solches Koordinatensystem nicht; wohl aber gibt es *zu jedem Punkt P* Koordinatensysteme x_i von der Art, daß für sie im Punkte P die Komponenten g_{ik} des Fundamentaltensors stationär werden $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0\right)$. Wir sprechen dann von einem *geodätischen Koordinatensystem in P.* Der leitende Gedanke bei der Weiterführung der Tensorrechnung ist nun der, zu unabhängigen Variablen z_i nicht mehr ein beliebiges, sondern ein in P geodätisches Koordinatensystem zu benutzen.

Um ein solches System möglichst einfach zu konstruieren und die weiteren Rechnungen in durchsichtiger invarianter Form durchführen zu können, erweist sich folgende Hilfskonstruktion als zweckdienlich. Es liege ein Vektorfeld vor mit den kovarianten Komponenten ξ_i, den kontravarianten ξ^i. Dann ist

$$\xi_k \xi^k = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

eine Invariante. Wir bilden ihren Gradienten; es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_k \xi^k) = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \xi^k + \xi_k \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial (g_{kl} \xi^l)}{\partial x_i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} \xi^l + g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i}, \tag{25}$$

$$\xi^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \xi_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s; \tag{26}$$

also

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_k \xi^k) = \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s = \xi^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s. \tag{27}$$

Wir benutzen hier den zweiten Ausdruck. Durch Multiplikation des Flächentensors 1. Stufe

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

mit ξ^k und Verjüngung nach k erhalten wir den Vektor mit den kovarianten Komponenten

$$\xi^k \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right),$$

durch Addition desselben zu (27) aber den Vektor

$$\lambda_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \cdot \xi^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \xi^r \xi^s.$$

Wir formen seine Komponenten λ_i noch dadurch um, daß wir überall, auch im ersten Glied, die kontravarianten Komponenten von ξ benutzen — vgl. die analoge Umrechnung (25), (26) —:

$$\xi^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = g_{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \xi^k + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} \xi^r \xi^s.$$

Wenn wir hier Symmetrie in bezug auf r und s herstellen und zu den kontravarianten Komponenten von λ übergehen, so werden wir dazu gedrängt, die Größen $\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}$ und die »Christoffelschen Dreiindizessymbole« $\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}$ einzuführen durch die Gleichungen

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) = \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} = g_{ij} \begin{Bmatrix} r\,s \\ j \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

und erhalten

$$\lambda^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \xi^r \xi^s. \tag{30}$$

Der durch diese Formel dargestellte Zusammenhang zwischen den Vektoren ξ und λ ist unabhängig vom Koordinatensystem.

Bevor wir weiter gehen, mögen noch einige Bemerkungen über die Dreiindizessymbole Platz finden. Gegenüber *linearen* Transformationen besitzt $\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}$ Tensorcharakter, und zwar kovarianten in bezug auf alle drei Indizes. Mit Rücksicht darauf und auf den Zusammenhang zwischen den »eckigen« und »geschweiften« Klammergrößen wäre die Bezeichnung

$$\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{rs}$$

angemessen. — Durch Umkehrung der Gleichungen (28) lassen sich leicht die Ableitungen der g_{ik} aus den Indizessymbolen berechnen; es gilt

$$(31) \qquad \begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s\,i \\ r \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i}.$$

Ein geodätisches Koordinatensystem kann demnach durch das Verschwinden der sämtlichen Größen $\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}$ oder auch der sämtlichen $\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}$ charakterisiert werden. Die Christoffelschen Dreiindizessymbole werden in den folgenden mathematischen Entwicklungen wie auch später in den physikalischen Anwendungen eine hervorragende Rolle spielen; es mag gleich hier verraten werden, daß sie in der Einsteinschen Theorie, nach der die Gravitation dem Raum seine Maßbestimmung aufprägt, die Bedeutung der Komponenten des Gravitationsfeldes haben.

Daß an einer Stelle P die Komponenten λ^i verschwinden, ist eine invariante Eigenschaft des Vektorfeldes ξ, die wir durch die Worte ausdrücken wollen: das Vektorfeld ξ ist im Punkte P geodätisch. Dann gilt der Satz:

Das Koordinatensystem x_i ist an der Stelle P dann und nur dann geodätisch, wenn jedes Vektorfeld, das in diesem Koordinatensystem *konstante* Komponenten ξ^i besitzt, im Punkte P geodätisch ist.

Denn für jedes Vektorfeld mit konstanten Komponenten ξ^i ist

$$\lambda^i = \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \xi^r \xi^s;$$

daraus geht unsere Behauptung hervor.

Seien z_i, x_i irgend zwei Koordinatensysteme. Wir wählen ein Vektorfeld mit den konstanten (kontravarianten) Komponenten d^i in z; $\xi^i = dx_i$ seien seine Komponenten in x; die z_i fungieren als unabhängige Variable. Es ist jetzt

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} dx_k = d\xi^i = d^2 x_i,$$

und die Gleichungen (30) lauten:

$$(32) \qquad d^2 x_i + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} dx_r\, dx_s = \lambda^i.$$

Daher:

Benutzt man die Koordinaten z_i als unabhängige Variable und is x_i irgendein Koordinatensystem, so ist das erste dann und nur dann im Punkte P geodätisch, wenn daselbst im Sinne Cauchys die Gleichungen

$$(33) \qquad d^2 x_i + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} dx_r\, dx_s = 0$$

(identisch in den Differentialen der unabhängigen Variablen) bestehen.

Zunächst erhalten wir daraus sehr einfach die Konstruktion eines geodätischen Koordinatensystems z_i für den Punkt P. Sind nämlich x beliebige Koordinaten, die im Punkte P die Werte x_i^0 haben, und bedeuten $\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_0$ die Werte der Indizessymbole daselbst, so brauchen wi nur die Transformation

$$x_i - x_i^0 = z_i - \tfrac{1}{2} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_0 z_r\, z_s$$

auszuführen. Für $z_i = 0$ ist dann in der Tat, wenn die z_i als unabhängige Variable fungieren,

$$x_i = x_i^0, \qquad dx_i = dz_i, \qquad d^2 x_i = - \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_0 dz_r\, dz_s.$$

Es bestehen somit die Gleichungen (33).

Vor allem aber ist in unserm Satz folgende Tatsache ausgesproche Benutzt man Koordinaten, die für P geodätisch sind, als unabhängi Variable, so gelten in jedem Koordinatensystem die Gleichungen (33) der Stelle P. Wir können dies Ergebnis noch verallgemeinern, wen wir ein zweites Vektorfeld δ einführen, das in den unabhängigen Variabl die konstanten Komponenten δ^i hat. Dann gilt im Punkte P auch

$$(34) \qquad \delta\, dx_i + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} dx_r\, \delta x_s = 0\,.$$

Denn wegen $\delta\, dx_i = d\, \delta x_i$ ist die linke Seite eine symmetrische Biline form der d^i und δ^i; da die zugehörige quadratische Form, welche ihr durch die Identifizierung der δ^i mit den d^i entspringt, identisch v schwindet, muß sie selber auch verschwinden.

Die Gleichung (34) lehrt folgendes: Sei im Punkte P ein Vektor gegeben; wir gehen durch die infinitesimale Verschiebung δx_i zum Na barpunkt P' über. Ordnen wir diesem Punkte P' einen Vektor $\xi^i + \delta \xi^i$ der in dem für P geodätischen Koordinatensystem die gleichen Kom nenten besitzt wie der gegebene Vektor im Punkte P, so gilt

$$(35) \qquad \delta \xi^i = - \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \xi^r\, \delta x_s.$$

Diese Bedingung ist, wie man aus (35) sieht, worin das betr. geodäti Koordinatensystem gar nicht eingeht, unabhängig von der Wahl desse und durch (35) sogleich für ein beliebiges Koordinatensystem formu Die durch (35) definierte Variation von ξ beim Übergang von P z hat demnach invariante Bedeutung; durch sie wird, wie man sich n

gemäß ausdrücken wird, der ursprüngliche Vektor *ungeändert* von P nach P' verpflanzt, er wird *parallel mit sich* von P nach P' verschoben. Damit sind wir zu dem invarianten Grundbegriff[9]) gelangt, von dem aus der Aufbau des vollständigen Tensorkalküls sich mühelos vollziehen läßt. Benutzen wir in P ein geodätisches Koordinatensystem, so bleiben bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung δ nicht bloß die kontravarianten Komponenten ξ^i, sondern auch die kovarianten $\xi_i = g_{ik}\xi^k$ ungeändert, da ja in einem geodätischen Koordinatensystem $\delta g_{ik} = 0$ ist. Sind also ξ^i, η^i zwei Vektoren im Punkte P, so bleibt bei einer gemeinsamen infinitesimalen Parallelverschiebung ihr invariantes skalares Produkt

$$\xi^i \eta_i = \xi_i \eta^i = g_{ik}\xi^i \eta^k$$

erhalten. Wenden wir dies erstens an auf den Fall $\eta = \xi$ und zweitens auf die beiden Vektoren ξ und η, so können wir diesen Satz anschaulicher dahin aussprechen, daß bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung die Längen der beiden Vektoren und der Winkel, den sie miteinander einschließen, erhalten bleiben. Ebensowenig werden durch sie natürlich die zwischen zwei, bzw. drei Vektoren ξ, η, ζ bestehenden Beziehungen

$$\eta^i = \alpha \cdot \xi^i, \qquad \zeta^i = \xi^i + \eta^i \qquad (\alpha \text{ eine Konstante})$$

zerstört. Aus der Gleichung $\delta(\xi_i \eta^i) = 0$ für eine Parallelverschiebung δ ergeben sich noch die Formeln für die Zuwächse $\delta \xi_i$ der *kovarianten* Komponenten ξ_i bei diesem Prozeß:

$$\begin{aligned} \delta(\xi_i \eta^i) &= \eta^i \delta \xi_i + \xi_i \delta \eta^i \\ &= \eta^i \delta \xi_i - \xi_i \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \eta^r \delta x_s \\ &= \eta^i \left(\delta \xi_i - \begin{Bmatrix} i\,s \\ r \end{Bmatrix} \xi_r \delta x_s \right), \end{aligned}$$

also

(36) $$\delta \xi_i = \begin{Bmatrix} i\,s \\ r \end{Bmatrix} \xi_r \delta x_s .$$

Natürlich gelangt man zu dem gleichen Ergebnis durch Umrechnung von (35) auf die kovarianten Komponenten.

Ist eine Kurve in Parameterdarstellung $x_i = x_i(s)$ gegeben und in ihrem Anfangspunkt ein Vektor, so können wir diesen längs der ganzen Kurve parallel mit sich verschieben. Es entspricht dann jedem Parameterwert s nicht nur ein Punkt $P = P(s)$, sondern gleichzeitig ein Vektor $\xi^i = \xi^i(s)$ in diesem Punkte $P(s)$, und zwar in solcher Weise, daß die Gleichungen

$$\frac{d\xi^i}{ds} = -\begin{Bmatrix} h\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^h \frac{dx_l}{ds}$$

bestehen. Durch sie, die invarianten Charakter besitzen, werden in der Tat nach bekannten Existenztheoremen über Differentialgleichungen die Funktionen $\xi^i(s)$ bei gegebenen Anfangswerten eindeutig bestimmt. Der Vektor behält bei der Verschiebung konstante Länge. Die Bedingungen

(35) für eine infinitesimale Parallelverschiebung sind in dem Sinne »nicht integrabel«, daß *ein Vektor im allgemeinen bei Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve nicht in seine Ausgangslage zurückkehrt.* Auf diesen Umstand werden wir im § 16 genauer eingehen. Es stellt sich heraus, daß *nur* in der Euklidischen Geometrie allgemein Integrabilität statthat, und gerade darin liegt die invariante Charakterisierung der Euklidischen Geometrie.

Alle unsere Betrachtungen gelten so gut für eine indefinite wie für eine definite quadratische Grundform, wenn sie nur eine von 0 verschiedene Determinante besitzt. Um sich aber geometrisch ausdrücken zu können, ist es bequem, sich auf den zweiten Fall zu beschränken. Für eine Kurve können wir dann, indem wir die Bogenlänge als Parameter benutzen, eine Darstellung $x_i = x_i(s)$ geben, für welche der Vektor mit den Komponenten $\frac{dx_i}{ds} = u^i$ die Länge 1 hat; ihn haben wir die Richtung genannt. *Ändert sich die Richtung einer Kurve längs derselben nicht*, sondern wandert parallel mit sich fort, so heißt die Kurve eine *geodätische Linie.* Sie ist das naturgemäße Analogon der Euklidischen Geraden in der allgemeinen Riemannschen Geometrie; denn die kennzeichnendste Eigenschaft der geraden Linie ist eben die, daß sie ihre Richtung ungeändert einhält. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linie lauten

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h\ l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds} = 0. \tag{37}$$

In einem Punkte, in welchem das zugrunde liegende Koordinatensystem geodätisch ist, reduzieren sie sich auf $\frac{d^2x_i}{ds^2} = 0$.

Indem wir zum Ausgang der Untersuchungen dieses Paragraphen zurückkehren, sei zum Schluß noch eine Bemerkung über die »geodätischen Vektorfelder« hinzugefügt. Wir pflegen jedes Vektorfeld

$$\xi^i = \xi^i(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

graphisch darzustellen durch Zeichnung der »Feldlinien« (der »Kraftlinien« im Falle eines Kraftfeldes), d. i. derjenigen Linien, die durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi^i(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

bestimmt werden. Bei Einführung dieser Linien gehen die charakteristischen Gleichungen $\lambda^i = 0$ eines geodätischen Feldes über in (37); d. h. die Feldlinien eines überall geodätischen Vektorfeldes sind geodätische Linien, und das Feld hat längs jeder solchen Feldlinie konstanten Betrag (dadurch ist es aber auch vollständig gekennzeichnet). Im übrigen ist dieser Begriff des geodätischen Feldes nur ein Hilfsbegriff, dem keine erhebliche systematische Bedeutung zukommt.

§ 15. Allgemeine Tensoranalysis.

Nunmehr ist es aber an der Zeit, zu schildern, wie auf Grund des invarianten Begriffs der Parallelverschiebung der absolute Differentialkalkül, von dem ein erstes Stück in § 13 ausgeführt wurde, vollständig begründet werden kann. Wir wählen als Beispiel ein durch seine kovarianten Komponenten gegebenes Tensorfeld 2. Stufe φ_{ik}; Symmetrie braucht nicht vorausgesetzt zu werden. Wir nehmen im Punkte P irgend zwei Vektoren ξ, η und bilden die Variation, welche die Invariante $\varphi_{ik}\xi^i\eta^k$ bei der infinitesimalen Verschiebung δ erleidet, die den Punkt P in P' überführt, falls dabei die Vektoren ξ und η »ungeändert«, parallel mit sich von P nach P' verpflanzt werden. Dafür finden wir

$$\delta(\varphi_{ik}\xi^i\eta^k) = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_l}\xi^i\eta^k\delta x_l + \varphi_{ik}\eta^k\delta\xi^i + \varphi_{ik}\xi^i\delta\eta^k.$$

Die letzten beiden Summanden sind gemäß der Bedingung der Parallelverschiebung

$$= -\varphi_{ik}\eta^k\begin{Bmatrix} r\,l \\ i \end{Bmatrix}\xi^r\delta x_l - \varphi_{ik}\xi^i\begin{Bmatrix} r\,l \\ k \end{Bmatrix}\eta^r\delta x_l.$$

Indem wir die Indizes an ξ und η in den drei Summanden zur Übereinstimmung bringen, erhalten wir für jene invariante Variation einen Wert, der sich als eine trilineare Form von ξ^i, η^k, δx_l darstellt mit den Koeffizienten

$$\text{(II)} \qquad \psi_{ik,l} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_l} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix}\varphi_{rk} - \begin{Bmatrix} k\,l \\ r \end{Bmatrix}\varphi_{ir}.$$

Die $\psi_{ik,l}$ sind somit die kovarianten Komponenten eines Tensors 3. Stufe (im erweiterten Sinne), der durch den Tensor φ_{ik} unabhängig vom Koordinatensystem bestimmt ist.

Auf dem gleichen Wege und in demselben Sinne erhält man aus einem Vektor mit den kovarianten Komponenten φ_i einen Tensor 2. Stufe

$$\text{(I)} \qquad \psi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r.$$

Aber auch bei Benutzung zum Teil oder vollständig kontravarianter Komponenten lassen sich diese invarianten Differentialoperationen direkt ausführen, ohne daß es nötig wäre, sie aus den kovarianten durch mühsames Umrechnen herzuleiten. Nehmen wir das letzte Beispiel! Es ist (unter ξ wiederum einen Vektor im Punkte P verstanden, der bei der auszuführenden Verschiebung δ ungeändert mitgeht)

$$\varphi_i\xi^i = \varphi^i\xi_i.$$

Einerseits ist nun nach (35)

$$\delta(\varphi_i\xi^i) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r\right)\xi^i\delta x_k,$$

anderseits nach (36)

$$\delta(\varphi^i\xi_i) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} k\,r \\ i \end{Bmatrix}\varphi^r\right)\xi_i\delta x_k.$$

Der durch (I) gegebene invariante Zusammenhang zwischen dem Vektor φ und dem Tensor ψ läßt sich daher auch in die Formeln fassen

$$(\mathrm{I}') \qquad \psi^i_k = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \left\{ {k r \atop i} \right\} \varphi^r.$$

Statt (II) findet man auf die gleiche Weise auch

$$(\mathrm{II}') \qquad \psi^i_{k,l} = \frac{\partial \varphi^i_k}{\partial x_l} + \left\{ {l r \atop i} \right\} \varphi^r_k - \left\{ {k l \atop r} \right\} \varphi^i_r,$$

$$(\mathrm{II}'') \qquad \psi^{ik}_l = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_l} + \left\{ {l r \atop i} \right\} \varphi^{rk} + \left\{ {l r \atop k} \right\} \varphi^{ir}.$$

Verjüngen wir (I′) nach i und k, (II′), (II″) aber nach i und l und ersetzen darin hernach den Index k durch i, so erhalten wir:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad \text{die Invariante } \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i} + \left\{ {i r \atop i} \right\} \varphi^r,$$

$$(\mathrm{II}_0) \qquad \text{den Vektor} \begin{cases} \psi_i = \dfrac{\partial \varphi^k_i}{\partial x_k} + \left\{ {k r \atop k} \right\} \varphi^r_i - \left\{ {i k \atop r} \right\} \varphi^k_r, \\[2ex] \psi^i = \dfrac{\partial \varphi^{ki}}{\partial x_k} + \left\{ {k r \atop k} \right\} \varphi^{ri} + \left\{ {k r \atop i} \right\} \varphi^{kr}. \end{cases}$$

Für die hierin immerfort auftretende Summe

$$\sum_i \left\{ {i r \atop i} \right\}$$

läßt sich ein bemerkenswerter einfacher Ausdruck angeben. Betrachtet man in der Determinante g der Elemente g_{ik} die g_{ik} als unabhängige Variable, so ist die Ableitung der Determinante nach dem Element g_{ik} die zu diesem Element adjungierte Unterdeterminante, also $= g \cdot g^{ik}$; so daß bei beliebiger Variation der Elemente die Formel gilt

$$(38) \qquad \frac{\delta g}{g} = g^{ik} \delta g_{ik}.$$

Summiert man das Produkt $g_{ik} g^{ik}$ zunächst nur über k, so ergibt sich 1 gemäß den Beziehungen, die zwischen den Koeffizienten zweier zueinander inversen linearen Transformationen g_{ik} und g^{ik} bestehen. Summiert man auch noch über i, so erhält man demnach den konstanten ganzzahligen Wert n. Daher ist

$$\sum_{ik} (g_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta g_{ik}) = 0,$$

und neben (38) gilt die Formel

$$(39) \qquad \frac{\delta g}{g} = - g_{ik} \delta g^{ik},$$

von der wir später gelegentlich Gebrauch machen werden. Jetzt aber schließen wir aus (38) zunächst

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_r} = \frac{\partial \lg g}{\partial x_r} = g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = g^{ik}\left(\begin{bmatrix} i\,r \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\,r \\ i \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{Bmatrix} i\,r \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k\,r \\ k \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} i\,r \\ i \end{Bmatrix},$$

daher

$$\begin{Bmatrix} i\,r \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x_r} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r}.$$

Damit ergibt sich für (I_0) die einfachere Formel

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot\varphi^i)}{\partial x_i}$$

und für (II_0):

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad \psi_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot\varphi^k{}_i)}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\varphi^r{}_s,$$

$$(\mathrm{IV}_2) \qquad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot\varphi^{ki})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{rs}.$$

Ist φ^{ik} schiefsymmetrisch, also ein Flächentensor 1. Stufe, so fällt in der letzten Formel das zweite Glied fort.

Wir bilden die Tensoren (II″) und (IV_2) insbesondere für $\varphi^{ik} = g^{ik}$. Benutzen wir im Punkte P ein geodätisches Koordinatensystem zur Ausrechnung, so finden wir, daß die Komponenten dieser Tensoren dort verschwinden, da ja in einem solchen Koordinatensystem die Ableitungen der g_{ik} und somit auch der g^{ik} alle $= 0$ sind. Wenn aber die Komponenten eines *Tensors* in *einem* Koordinatensystem verschwinden, so tun sie es in jedem andern. Wir kommen so zu den Identitäten, von denen wir bei späteren Rechnungen in der Gravitationstheorie Gebrauch zu machen denken:

$$(40) \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot g^{ik})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} g^{rs} = 0,$$

$$(41) \qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ i \end{Bmatrix} g^{rk} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ k \end{Bmatrix} g^{ir} = 0.$$

Der absolute Differentialkalkül ist bereits in der Euklidischen Geometrie von großem Nutzen, wenn man Rechnungen nicht in einem Cartesischen oder affinen, sondern in einem krummlinigen Koordinatensystem durchzuführen hat, wie das in der mathematischen Physik häufig der Fall ist. Um diese Verwendung des Tensorkalküls zu illustrieren, wollen wir die Grundgleichungen für das elektrostatische Feld und das Magnetfeld stationärer Ströme hier in allgemeinen krummlinigen Koordinaten hinschreiben.

Die kovarianten Komponenten E_i der elektrischen Feldstärke leiten sich aus einem Potential $-\varphi$ ab nach den Formeln

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \tag{42}$$

sie genügen infolgedessen den invarianten Gleichungen

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 0. \tag{42'}$$

Ihre kontravarianten Komponenten

$$E^i = g^{ik} E_k$$

erfüllen die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot E^i)}{\partial x_i} = \varrho, \tag{43}$$

in welcher ϱ die Elektrizitätsdichte bedeutet. Die Ausdrücke für die Spannungen bleiben die alten [Kap. I, Gl. (64)]. — Zum Beweise genügt die Bemerkung, daß diese Gleichungen, so wie wir sie hingeschrieben haben, absolut invarianten Charakter besitzen, für ein Cartesisches Koordinatensystem aber in die früher aufgestellten Grundgleichungen übergehen.

Das Magnetfeld stationärer elektrischer Ströme ist ein Flächentensor 1. Stufe; H_{ik} seien seine kovarianten,

$$H^{ik} = g^{ij} g^{kh} H_{jh}$$

seine kontravarianten Komponenten. Er leitet sich aus einem Vektorpotential φ_i ab:

$$H_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \tag{44}$$

und daher ist

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} = 0. \tag{44'}$$

Sind ferner s^i die kontravarianten Komponenten des Stromvektors, so gilt außerdem

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} H^{ik})}{\partial x_k} = s^i. \tag{45}$$

Man spezialisiere diese Formeln z. B. für den Fall der Kugel- und Zylinderkoordinaten; das ist ohne weitere Rechnungen möglich, sobald man den Ausdruck von ds^2, des Abstandsquadrats zweier Nachbarpunkte, in jenen Koordinaten besitzt, den man durch eine einfache infinitesimal-geometrische Betrachtung gewinnt.

Von größerer prinzipieller Wichtigkeit ist aber dies, daß wir in (42) bis (45) die Grundgesetze des stationären elektromagnetischen Feldes bereit haben für den Fall, daß wir aus irgendwelchen Gründen genötigt wären, die Euklidische Geometrie für den physikalischen Raum aufzugeben

und durch eine Riemannsche Geometrie mit anderer metrischer Fundamentalform zu ersetzen. Denn auch unter solchen allgemeineren geometrischen Verhältnissen stellen unsere Gleichungen wegen ihrer invarianten Natur »objektive«, von jedem Koordinatensystem unabhängige Aussagen über den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Ladung, Strom und Feld dar. Daß sie die natürliche Übertragung der im Euklidischen Raum gültigen Gesetze des stationären elektromagnetischen Feldes sind, darüber ist kein Zweifel möglich; ja, es ist geradezu wunderbar, wie einfach und zwanglos diese Übertragung sich aus dem allgemeinen Tensorkalkül ergibt. Die Frage, ob der Raum Euklidisch ist oder nicht, ist völlig irrelevant für die Gesetze des elektromagnetischen Feldes. (Die »Euklidizität« drückt sich in allgemein-invarianter Form durch Differentialgleichungen *2. Ordnung* für die g_{ik} aus — siehe § 16 —, in diese Gesetze gehen aber nur die g_{ik} und deren 1. Ableitungen ein!) — Eine derartig einfache Übertragung ist aber, wohlgemerkt, nur für die *Nahewirkungsgesetze* möglich. Die Herleitung der dem Coulombschen und dem Biot-Savartschen entsprechenden Fernwirkungsgesetze aus diesen Nahewirkungsgesetzen ist eine rein mathematische Aufgabe, die im wesentlichen auf Folgendes hinauskommt: An die Stelle der gewöhnlichen Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ tritt in der Riemannschen Geometrie als ihre invariante Verallgemeinerung — siehe (42) und (43) — die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\cdot g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) = 0;$$

d. i. eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Koeffizienten aber keine Konstanten mehr sind. Von ihr ist die an einer beliebig vorgegebenen Stelle unendlich werdende »Grundlösung« zu ermitteln, welche der Grundlösung $\frac{1}{r}$ der Potentialgleichung entspricht; deren Bestimmung ist ein schwieriges mathematisches Problem, das in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung behandelt wird. Dieselbe Aufgabe stellt sich auch schon bei Beschränkung auf den Euklidischen Raum ein, wenn man statt der Vorgänge im leeren Raum die in einem inhomogenen Medium (z. B. in einem Medium mit örtlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante) zu untersuchen hat.

§ 16. Raumkrümmung.

Wir haben bereits oben die Frage aufgeworfen, wann das System der »totalen Differentialgleichungen« (35) integrabel ist, d. h. wann der Satz besteht, daß ein Vektor bei Parallelverschiebung längs einer beliebigen geschlossenen Kurve zu seiner Ausgangslage zurückkehrt, und haben behauptet, daß dies nur in der Euklidischen Geometrie zutrifft; durch das Bestehen dieser Tatsache ist die Euklidische Geometrie unter allen möglichen Riemannschen Geometrien in invarianter Weise charakterisiert. Wenn Integrabilität stattfindet, erhält man zu einem gegebenen Vektor im Punkte P

durch Parallelverschiebung nach allen Punkten des Raumes ein Vektorfeld $\xi^i(x_1 x_2 \dots x_n)$, das identisch den Bedingungen (35) genügt. Für dieses Vektorfeld bestehen dann die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} = - \begin{Bmatrix} j\,k \\ i \end{Bmatrix} \xi^j. \tag{46}$$

Setzen wir die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_h}\right)$$

an, so finden wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} j\,k \\ i \end{Bmatrix}\right)\xi^j + \left(\begin{Bmatrix} r\,h \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} r\,k \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_h}\right) = 0.$$

Führen wir darin für die Ableitungen der ξ abermals die Werte (46) ein, so erhalten wir auf der linken Seite eine Linearform der ξ^j mit den Koeffizienten

$$R^i_{jhk} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} j\,k \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r\,h \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j\,k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\,k \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j\,h \\ r \end{Bmatrix}, \tag{47}$$

und es müssen also die Gleichungen bestehen

$$R^i_{jhk} = 0. \tag{48}$$

Die Theorie der Differentialgleichungen lehrt, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind für die Integrabilität des Systems (35). Die Gleichungen (48) besitzen also invarianten Charakter. Genauer aber behaupte ich, daß in jedem Riemannschen Raum R^i_{jhk} die in den Indizes jhk kovarianten, in dem Index i kontravarianten *Komponenten eines Tensors 4. Stufe* sind; wir sind durch unsere Fragestellung in der natürlichsten Weise auf diesen *Riemannschen »Krümmungstensor«* R geführt worden.

Zum Beweise nehmen wir ein beliebiges Vektorfeld mit den kovarianten Komponenten φ_i zu Hilfe und bilden $\delta(\varphi_i \eta^i)$, indem wir bei der infinitesimalen Verschiebung δ wie immer den Vektor η im Punkte P ungeändert mitnehmen:

$$\delta(\varphi_i \eta^i) = \eta^i \delta \varphi_i - \varphi_i \begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} \xi^j \delta x_h.$$

Darauf bilden wir, nachdem wir für δx_h den beliebigen Vektor $\bar{\xi}^h$ in P eingesetzt haben, von dem Ausdruck rechter Hand in der gleichen Weise die Variation, die einer zweiten infinitesimalen Verschiebung d im gleichen Punkte entspricht. Den so entstehenden Ausdruck, in dem wir noch $\bar{\eta}^k$ anstelle von dx_k schreiben, bezeichnen wir kurz mit $d\delta(\varphi_i \eta^i)$. Wenn das Symbol $d\delta\eta^i$ entsprechend interpretiert wird, ist dann

$$d\delta(\varphi_i \eta^i) = \eta^i d\delta\varphi_i + d\eta^i \delta\varphi_i + \delta\eta^i d\varphi_i + \varphi_i d\delta\eta^i,$$

$$d\delta\eta^i = \left(-\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\,h \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j\,k \\ r \end{Bmatrix}\right)\eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k - \begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} \eta^j d\delta x_h.$$

Bilde ich in derselben Weise den invarianten Ausdruck $\delta d(\varphi_i \eta^i)$, so kommt, da

$$d\delta \varphi_i = \delta d \varphi_i, \quad d\delta x_h = \delta d x_h$$

ist, durch Subtraktion, wenn D die Operation $\delta d - d\delta$ bedeutet:

$$D(\varphi_i \eta^i) = \varphi_i D \eta^i = R^i_{jhk} \varphi_i \eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k;$$

und damit ist unsere Behauptung erwiesen. Man beachte bei dieser Ableitung wohl, daß φ_i ein Vektor*feld* bedeutete, η, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ aber Vektoren im Punkte P, die bei der jeweiligen infinitesimalen Verschiebung ungeändert mitgenommen werden; das ist wegen der Nicht-Integrabilität der Bedingungen (35) ein wesentlicher Unterschied!

Wir können aber jetzt auch für φ einen Vektor ξ in P nehmen und haben dann in

$$\xi_i D \eta^i = R_{ij,hk} \xi^i \eta^j \bar{\xi}^h \bar{\eta}^k = F(\xi \eta \bar{\xi} \bar{\eta})$$

eine invariante Quadrilinearform. Indem wir die unabhängigen Vektoren als infinitesimale Verschiebungen auffassen, wollen wir noch setzen

$$\xi^i = d_1 x_i, \quad \eta^i = d_2 x_i, \quad \bar{\xi}^i (= \delta x_i) = d_3 x_i, \quad \bar{\eta}^i (= d x_i) = d_4 x_i$$

und jene Form mit $F(1\,2\,3\,4)$ bezeichnen. Dann besteht zunächst offenbar die Relation

$$F(1\,2\,4\,3) = - F(1\,2\,3\,4).$$

Um zu zeigen, daß auch

$$F(2\,1\,3\,4) = - F(1\,2\,3\,4)$$

ist, gehen wir davon aus, daß bei einer infinitesimalen Verschiebung δ, bei welcher die Vektoren ξ und η wie immer ungeändert mitgenommen werden,

$$\delta(\xi_i \eta^i) = \delta \xi_i \cdot \eta^i + \xi_i \delta \eta^i = 0$$

ist. Daraus folgt

$$d\delta \xi_i \cdot \eta^i + \delta \xi_i d\eta^i + d\xi_i \delta \eta^i + \xi_i d\delta \eta^i = 0,$$

(49) $$\eta^i D \xi_i + \xi_i D \eta^i = 0.$$

Ist anderseits φ ein Vektor*feld*, so ist

$$D(\varphi_i \eta^i) = D(\varphi^i \eta_i),$$

und wie wir die linke Seite $= \varphi_i D \eta^i$ gefunden haben, so ist hier die rechte Seite $= \varphi^i D \eta_i$. In der so gewonnenen Relation können wir aber dann für φ wiederum einen beliebigen Vektor ξ in P setzen; wenn wir noch ξ und η vertauschen, ist also

$$\eta_i D \xi^i = \eta^i D \xi_i,$$

und damit ist unter Berücksichtigung von (49) die behauptete Gleichung

$$\eta_i D \xi^i = - \xi_i D \eta^i$$

gewonnen. — Ferner gilt auch

$$F(1\,2\,3\,4) + F(1\,3\,4\,2) + F(1\,4\,2\,3) = 0.$$

Sie besagt in anderer Schreibweise, daß

$$(d_3 d_4 d_2 x_i - d_4 d_3 d_2 x_i) + (d_4 d_2 d_3 x_i - d_2 d_4 d_3 x_i) + (d_2 d_3 d_4 x_i - d_3 d_2 d_4 x_i) = 0$$

ist. In der Tat zerstören sich in der Summe links je zwei Terme gegenseitig, wie das durch die Haken angedeutet ist, da z. B.

$$d_3 d_2 x_i = d_2 d_3 x_i$$

gilt. Aus den bewiesenen Relationen[10]) folgt endlich, wie wir wissen (§ 7), die weitere

$$F(1\,2\,3\,4) = F(3\,4\,1\,2).$$

(Man kann die entsprechenden, in § 7 angegebenen Bedingungen, denen die Koeffizienten R genügen, auch durch direktes Ausrechnen bestätigen.) Die Quadrilinearform ist demnach bereits eindeutig bestimmt durch Angabe der zugehörigen quadratischen Form $F(\delta x, dx, \delta x, dx)$ oder

$$J = \tfrac{1}{4} R_{ij,hk}\, df^{ij}\, df^{hk}$$

der Flächendifferentiale

$$df^{ij} = \delta x_i\, dx_j - \delta x_j\, dx_i.$$

Wir haben es also mit einem *Flächentensor* 2. *Stufe* zu tun, dessen Komponenten die $R_{ij,hk}$ sind. Dividieren wir J durch das Quadrat der Größe des durch die df^{ij} charakterisierten (von den Verschiebungen δ und d aufgespannten) Flächenelements, so hängt der Quotient, außer von der Raumstelle P, nur von dem Verhältnis der df^{ij}, d. h. nur von der Stellung des betr. Flächenelements im Punkte P ab. Dieser Quotient ist *die Krümmung des Raumes an der Stelle P in dieser Flächenrichtung*. Wenn der Raum metrisch homogen ist, muß sie = konst. sein.

Verjüngen wir R^i_{jhk} nach i und j, so kommt 0; verjüngen wir aber nach i und h, d. h. setzen $i = h$ und summieren über diesen Index, so muß ein Linientensor 2. Stufe entstehen. Indem wir die Indizierung noch in geeigneter Weise abändern, kommt

$$(50) \quad R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}.$$

Nur der erste Term auf der rechten Seite läßt hier die Symmetrie in bezug auf i und k nicht unmittelbar erkennen; er ist aber

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (\lg g)}{\partial x_i\, \partial x_k}.$$

In der Gravitationstheorie wird nur dieser verjüngte »*Linientensor Krümmung*« R_{ik} auftreten. Er ist ein Differentialausdruck 2. Ordnung in den g_{ik}, der die 2. Ableitungen linear enthält. Aus ihm können wir schließlich noch durch abermalige Verjüngung die »*Invariante Krümmung*«

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

bilden.

Geometrische Deutungen der Riemannschen Krümmung ergeben sich aus dem Zusammenhang, in dem sie mit der Änderung steht, die ein Vektor bei Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve erfährt.

Wir wollen jedoch darauf nicht näher eingehen [11]). Doch sei es noch gestattet, kurz den einfachsten Weg zu skizzieren, auf dem man beweisen kann, daß *die quadratische Krümmungsform J nur für die Euklidische Geometrie verschwindet.* Wenn $J = 0$ ist, kann man einen im Punkte P gegebenen Vektor in eindeutig bestimmter Weise »ungeändert« nach jedem Raumpunkt verpflanzen; es hat dann einen Sinn, von »demselben« Vektor in zwei beliebigen Raumpunkten zu reden. Erteilen wir jedem Raumpunkt eine infinitesimale Verschiebung in solcher Weise, daß der unendlichkleine Verschiebungsvektor in allen Punkten »derselbe« ist, so haben wir eine infinitesimale *Gesamt-Translation* des Raumes vorgenommen. Diese »Translationen« erfüllen die Axiome, welche wir in Kap. I, § 2 für die Vektoren formuliert haben. Durch genügend oftmalige Wiederholung einer infinitesimalen erhalten wir eine endliche Translation. Dadurch werden wir, wenn wir von n infinitesimalen Translationen in n unabhängigen Richtungen ausgehen, zu einem bestimmten »translativen« Koordinatensystem geführt; in ihm hat eine infinitesimale Translation in allen Punkten die gleichen Komponenten. Legen wir dieses Koordinatensystem zugrunde, so sind also die Gleichungen (35) identisch erfüllt, wenn wir die ξ^i konstant nehmen, d. h. es ist identisch $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} = 0$, und folglich sind die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform in jenen translativen Koordinaten konstant. Diese Überlegungen lassen sich Schritt für Schritt in das Gewand der Analysis kleiden und strenge durchführen. Wir wollen uns aber dabei, da der in Rede stehende Satz in der Physik keine Anwendung findet, nicht länger aufhalten.

Es wird manchen entsetzt haben, von welcher Sintflut von Formeln und Indizes hier der leitende Gedanke der Riemannschen Geometrie überschwemmt wurde. Es ist gewiß bedauerlich, daß wir uns um das rein Formale so ausführlich bemühen und ihm einen solchen Platz einräumen müssen; aber es läßt sich nicht vermeiden. Wie jeder Sprache und Schrift mühsam erlernen muß, ehe er sie mit Freiheit zum Ausdruck seiner Gedanken gebrauchen kann, so ist auch hier der einzige Weg, den Druck der Formeln von sich abzuwälzen, der, das Werkzeug der Tensoranalysis so in seine Gewalt zu bringen, daß man sich durch das Formale unbehindert den wahrhaften Problemen zuwenden kann, die uns beschäftigen: Einsicht in das Wesen von Raum, Zeit und Materie zu gewinnen, sofern sie am Aufbau der objektiven Wirklichkeit beteiligt sind. Für den, der auf solche Ziele aus ist, müßte es eigentlich heißen: das Mathematische versteht sich immer von selbst.

Unsere Arbeit wird nicht vergeblich gewesen sein. Nicht um seiner selbst willen ist dieser Holzstoß von Formeln von uns errichtet worden, sondern: wenn der Blitz des Gedankens niederfährt, wird er ihn entzünden zu einem Feuer, das ringsum das Land erleuchtet, und nicht in einem trüben Sumpf vager, gestaltloser Vorstellungen verzischen. — Ein paar letzte Reisige müssen wir noch dazuwerfen.

§ 17. Die geodätischen Linien als kürzeste.

Wir wollen zeigen, daß die geodätische Linie, wie die Gerade in der Euklidischen Geometrie, nicht nur die Differentialeigenschaft besitzt, ihre Richtung unverändert beizubehalten, sondern auch *die Integraleigenschaft, daß jedes Stück von ihr kürzeste Verbindungslinie seines Anfangs- und Endpunktes ist.* Doch ist diese Aussage nicht ganz wörtlich zu verstehen, sondern in demselben Sinne, wie wir etwa in der Mechanik sagen, daß im Gleichgewicht die potentielle Energie ein Minimum ist, oder von einer Funktion $F(xy)$ zweier Variablen sagen, sie habe dort ein Minimum, wo ihr Differential

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

identisch in dx, dy verschwindet; während es in Wahrheit heißen muß, daß sie dort einen »stationären« Wert annimmt, der sowohl ein Minimum wie ein Maximum wie auch ein »Sattelwert« sein kann. Die geodätische Linie ist nicht notwendig eine Kurve kürzester, wohl aber eine Kurve stationärer Länge. Auf der Kugeloberfläche z. B. sind die größten Kreise die geodätischen Linien; nehmen wir auf einem solchen Kreis zwei Punkte A und B an, so ist der kleinere der beiden Bögen AB zwar in der Tat kürzeste Verbindungslinie von A und B; aber auch der andere Bogen ist eine geodätische Verbindungslinie von A und B, er hat nicht kürzeste, sondern stationäre Länge.

Gegeben sei eine beliebige Kurve in Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(s), \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

die »Ausgangskurve«. Um sie mit Nachbarkurven zu vergleichen, betrachten wir ferner eine beliebige einparametrige Kurvenschar

$$x_i = x_i(s;\, \varepsilon) \qquad (a \leqq s \leqq b).$$

Der Parameter ε variiert in einem Intervall um $\varepsilon = 0$; $x_i(s; \varepsilon)$ sollen Funktionen sein, die sich für $\varepsilon = 0$ auf $x_i(s)$ reduzieren. Da alle Kurven der Schar den gleichen Anfangspunkt mit dem gleichen Endpunkt verbinden sollen, sind $x_i(a; \varepsilon)$ und $x_i(b; \varepsilon)$ unabhängig von ε. Die Länge einer solchen Kurve ist gegeben durch

$$L(\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{F}\, ds,$$

wo

$$F = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}.$$

Wir nehmen noch an, daß s für die Ausgangskurve die Bogenlänge bedeutet, somit $F = 1$ ist für $\varepsilon = 0$. Die Richtungskomponenten $\frac{dx_i}{ds}$

die Ausgangskurve $\varepsilon = 0$ mögen mit u^i bezeichnet werden. Wir setzen ferner

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{dx_i}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \xi^i(s) = \delta x_i;$$

das sind die Komponenten der »unendlich kleinen« Verschiebung, durch welche die Ausgangskurve in die einem unendlich kleinen Wert von ε entsprechende »variierte« Nachbarkurve übergeht; sie verschwinden an den Enden.

$$\varepsilon\left(\frac{dL}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \delta L$$

ist die zugehörige Variation der Länge. $\delta L = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die Ausgangskurve in der Kurvenschar stationäre Länge besitzt. Wenden wir das Zeichen δF im gleichen Sinne an, so ist

$$\delta L = \int_a^b \frac{\delta F}{2\sqrt{F}}\,ds = \tfrac{1}{2}\int_a^b \delta F\,ds, \tag{51}$$

da für die Ausgangskurve $F = 1$ ist. Bei der gewählten Parameterdarstellung hat für diese also auch das Integral $\int F\,ds$ einen stationären Wert. Es ist

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\varepsilon}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds} + 2\,g_{ik}\frac{dx_k}{ds}\frac{d^2x_i}{d\varepsilon\,ds}$$

und also (im zweiten Glied werden »Variation« und »Differentiation«, d. h. die Differentiationen nach ε und s vertauscht)

$$\delta F = \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i}u^h u^l \xi^i + 2\,g_{ik}u^k\frac{d\xi^i}{ds}.$$

Setzen wir dies in (51) ein und formen das zweite Glied durch eine partielle Integration um unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die ξ^k an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden, so kommt

$$\delta L = \int_a^b \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i}u^h u^l - \frac{d}{ds}(g_{ik}u^k)\right\}\xi^i\,ds.$$

Die Bedingung $\delta L = 0$ ist demnach dann und nur dann für jede beliebige Kurvenschar erfüllt, wenn

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}u^k) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i}u^h u^l$$

ist. Setzt man hier die linke Seite

$$= \frac{\partial g_{ih}}{\partial x_l}u^l u^h + g_{ik}\frac{du^k}{ds},$$

so ergeben sich die Gleichungen (37) der geodätischen Linie.

Die Eigenschaft, ihre Richtung unverändert beizubehalten, erscheint uns als die wesentlichste der geodätischen Linie. Es ist aber im Hinblick auf spätere physikalische Anwendungen von Wert, sie durch ein Variationsprinzip charakterisieren zu können.

Kapitel III.

Relativität von Raum und Zeit.

§ 18. Das Galileische Relativitätsprinzip.

Schon in der Einleitung ist besprochen worden, in welcher Weise wir mittels einer Uhr die Zeit messen und nach Wahl eines beliebigen Anfangspunktes in der Zeit und einer Zeiteinheit jeden Zeitpunkt durch eine Zahl t charakterisieren können. Aber in der *Verbindung von Raum und Zeit* liegen neue schwierige Probleme, welche den Gegenstand der Relativitätstheorie bilden; ihre Lösung, eine der größten Taten der menschlichen Geistesgeschichte, knüpft sich vor allem an die Namen *Kopernikus* und *Einstein*.[1])

Durch eine Uhr werden unmittelbar nur die zeitlichen Verhältnisse solcher Ereignisse festgelegt, die jeweils gerade dort geschehen, wo sich die Uhr befindet. Indem ich aber als naiver Mensch mit voller Selbstverständlichkeit die Dinge, die ich sehe, in den Zeitpunkt ihrer Wahrnehmung setze, dehne ich meine Zeit über die ganze Welt aus: ich glaube, daß es einen objektiven Sinn hat, von einem Ereignis, das irgendwo vor sich geht, zu behaupten, es geschehe »jetzt!« (in dem Augenblick, in dem ich das Wort ausspreche); daß es einen objektiven Sinn hat, von irgend zwei an verschiedenen Orten vorgefallenen Ereignissen zu fragen, ob das eine früher oder später als das andere geschehen sei. *An dieser These wollen wir hier zunächst festhalten.* Jedes raum-zeitlich streng lokalisierte Ereignis, wie etwa das Aufblitzen eines sofort wieder verlöschenden Fünkchens, geschieht in einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt oder *Weltpunkt:* »hier-jetzt«. Nach der eben ausgesprochenen These kommt jedem Weltpunkt eine bestimmte Zeitkoordinate t zu.

Nun handelt es sich weiter darum, den *Ort* eines derartigen Punktereignisses im Raume festzulegen. Wir schreiben z. B. zwei Massenpunkten in einem bestimmten Moment eine Entfernung zu. Wir nehmen also an, daß die Weltpunkte, die einem bestimmten Moment t entsprechen, eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit bilden, in welcher die Euklidische Geometrie gilt (wir greifen, was den Raum betrifft, in diesem Kapitel wieder auf den Standpunkt von Kap. I zurück). Wir wählen eine bestimmte Maßeinheit für die Länge und ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Momente t (etwa eine bestimmte Ecke des Hörsaals). Dann kommen jedem Weltpunkt, dessen Zeitkoordinate den Wert t hat, drei bestimmte Raumkoordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ zu.

Fassen wir aber jetzt einen andern Moment t' ins Auge. Wir nehmen an, es habe einen objektiven Sinn, zu sagen, wir messen im Momente t' mit der gleichen Längeneinheit wie im Momente t (mittels eines »starren«, sowohl zur Zeit t wie zur Zeit t' vorhandenen Maßstabes); diese Längen-

einheit sei neben der Zeiteinheit ein für allemal fest angenommen (cm, sec). Dann können wir aber noch die Lage des Cartesischen Koordinatensystems wiederum beliebig wählen, unabhängig von der Wahl zur Zeit t. Erst wenn wir der Überzeugung sind, es habe einen objektiven Sinn, von zwei zu beliebigen Zeiten geschehenden, »punktförmigen« Ereignissen zu behaupten, sie geschehen an *derselben* Raumstelle, von einem Körper zu behaupten, daß er *ruhe*, können wir die Lage des Koordinatensystems zu allen Zeiten auf Grund der willkürlich gewählten Lage in einem bestimmten Moment objektiv, ohne neue Aufweisungen individueller Gegenstände festlegen: nämlich durch die Forderung, daß das Koordinatensystem dauernd ruhe. Dann bekommen wir also nach Wahl eines Anfangspunktes der Zeitrechnung und eines Cartesischen Koordinatensystems in diesem Anfangsmoment zu jedem Weltpunkt vier bestimmte Koordinaten: die Zeitkoordinate t und die Raumkoordinaten $x_1\, x_2\, x_3$.

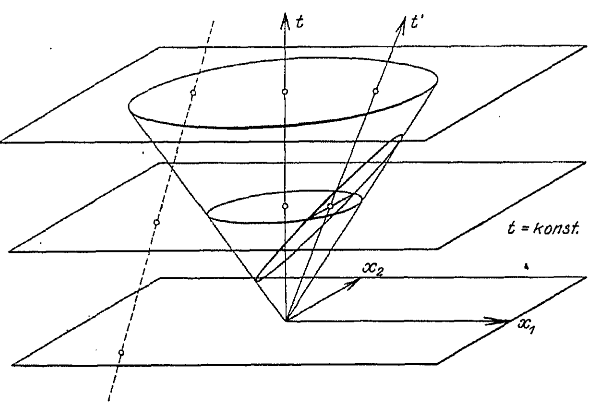


Fig. 7.

Um der Möglichkeit der graphischen Darstellung willen unterdrücken wir eine Raumkoordinate, nehmen den Raum somit nur zweidimensional, als eine Euklidische Ebene an.

Wir verfertigen uns ein graphisches Bild, indem wir in einem Raum mit dem rechtwinkligen Achsenkreuz $x_1\, x_2\, t$ den Weltpunkt durch einen Bildpunkt mit den Koordinaten $x_1\, x_2\, t$ repräsentieren. Von allen sich bewegenden Massenpunkten können wir dann in diesem Bilde den »graphischen Fahrplan« konstruieren; die Bewegung eines jeden wird dargestellt durch eine »Weltlinie«, deren Richtung beständig eine positive Komponente in Richtung der t-Achse besitzt. Die Weltlinien ruhender Massenpunkte sind Gerade parallel zur t-Achse; die Weltlinie eines in gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunktes ist eine Gerade. In einem Schnitt $t =$ konst. kann die Lage aller Massenpunkte im gleichen Moment t abgelesen werden. Wählen wir Anfangspunkt der Zeitrechnung und Cartesisches Koordinatensystem auf eine andere Weise und sind

$x_1 x_2 t$; $x'_1 x'_2 t'$ die Koordinaten eines willkürlichen Weltpunktes bei der ersten und zweiten Wahl des Koordinatensystems, so gelten Transformationsformeln

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_2 \\ t = \qquad\qquad t' + a \,, \end{cases}$$

wo die α und a Konstante bedeuten, die α_{ik} aber insbesondere die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bilden. Die Weltkoordinaten sind also in objektiver Weise, ohne Hinweis auf individuelle Gegenstände oder Geschehnisse festgelegt *bis auf eine beliebige Transformation von dieser Gestalt.* Dabei ist noch abgesehen von der willkürlichen Wahl der beiden Maßeinheiten. Bleibt der Anfangspunkt in Raum und Zeit ungeändert: $\alpha_1 = \alpha_2 = a = 0$, so sind $x'_1 x'_2 t'$ die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsensystem, dessen t'-Achse mit der t-Achse zusammenfällt, während die Achsen $x'_1 x'_2$ aus $x_1 x_2$ durch eine Drehung in ihrer Ebene $t = 0$ hervorgehen.

Schon eine geringe Besinnung zeigt, daß die eine der angenommenen Voraussetzungen: der Begriff der Ruhe habe einen objektiven Inhalt, nicht zutreffend ist. Wenn ich mit jemandem eine Verabredung treffe, wir wollen uns morgen an »derselben« Stelle wieder treffen wie heute, so heißt das: in derselben materiellen Umgebung, an dem gleichen Gebäude in der gleichen Straße (die nach Kopernikus morgen ganz wo anders im Weltenraum sich befindet als heute); und das hat seinen guten Sinn zufolge des glücklichen Umstandes, daß wir hineingeboren sind in eine wesentlich stabile Umwelt, in der alle Veränderung sich anschließt an einen viel umfassenderen Bestand, der seine (teils unmittelbar wahrgenommene, teils erschlossene) Beschaffenheit unverändert oder fast unverändert bewahrt. Die Häuser stehen still; das Schiff fährt mit soundsoviel Knoten Geschwindigkeit: das verstehen wir im täglichen Leben immer relativ zu der »dauernden wohlgegründeten Erde«. *Objektive Bedeutung haben nur die relativen Bewegungen der Körper* (Massenpunkte) *zueinander*, d. h. die Entfernungen und Winkel, welche sich aus den gleichzeitigen Lagen der Massenpunkte bestimmen, in ihrer funktionalen Abhängigkeit von der Zeit. Es ist also jedes (der Anschaulichkeit wegen materiell gedachte) dauernd vorhandene Cartesische Koordinatensystem jedem andern gleichberechtigt. Der Zusammenhang der Koordinaten desselben Weltpunktes mit Bezug auf das eine und das andere zweier solchen Systeme wird durch Formeln geliefert:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}(t')\, x'_1 + \alpha_{12}(t')\, x'_2 + \alpha_1(t') \,, \\ x_2 = \alpha_{21}(t')\, x'_1 + \alpha_{22}(t')\, x'_2 + \alpha_2(t') \,, \\ t = t' + a \,, \end{cases}$$

wo die α_i und α_{ik} irgendwelche stetige Funktionen von t' sein können, von denen die α_{ik} für alle Werte von t' die Koeffizienten einer orthogonalen

Transformation bilden. Tragen wir die Flächen $t' =$ konst. sowie $x'_1 =$ konst. und $x'_2 =$ konst. in unsere graphische Darstellung ein, so sind zwar die Flächen der ersten Schar wiederum Ebenen, die mit den Ebenen $t =$ konst. zusammenfallen, hingegen die beiden andern sind krumme Flächen; die Transformationsformeln sind nicht mehr linear.

Unter diesen Umständen kann es sich bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems von Massenpunkten, etwa der Planeten, nur darum handeln, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, welche die Raumkoordinaten der Massenpunkte in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, möglichst einfach werden oder doch möglichst einfachen Gesetzen genügen. Dies war die von Kepler außerordentlich vertiefte Entdeckung des Kopernikus, daß in der Tat ein Koordinatensystem existiert, für das die Gesetze der Planetenbewegung eine ungeheuer viel einfachere und durchsichtigere Form annehmen, als wenn man sie auf die ruhende Erde bezieht. Die Tat des Kopernikus wurde vor allem dadurch zur Weltanschauungswende, daß *er sich von dem Glauben an die absolute Bedeutung der Erde frei machte.* Seine Betrachtungen wie auch die Keplers sind rein *kinematischer* Natur. Newton krönte ihr Werk, indem er den wahren Grund für die kinematischen Keplerschen Gesetze in dem *dynamischen* Grundgesetz der Mechanik und dem Attraktionsgesetz auffand. Man weiß, wie glänzend sich diese Newtonsche Mechanik am Himmel und auf Erden bestätigt hat. Da ihr, wie wir überzeugt sind, universelle, nicht auf das Planetensystem beschränkte Geltung zukommt, ihre Gesetze aber keineswegs invariant gegenüber den Transformationen (II) sind, so wird durch sie in absoluter, von jedem Hinweis auf individuelle Gegenständlichkeit unabhängiger Weise eine viel vollständigere Festlegung des Koordinatensystems möglich als auf Grund der zu dem »Relativitätsprinzip« (II) führenden kinematischen Auffassung.

An der Spitze der Mechanik steht das *Galileische Trägheitsprinzip*: Ein Massenpunkt, der sich kräftefrei, ohne jede Einwirkung von außen bewegt, führt eine gleichförmige Translation aus. Seine Weltlinie ist mithin eine Gerade, die Raumkoordinaten x_1, x_2 des Massenpunktes lineare Funktionen der Zeit t. Gilt dieses Prinzip in bezug auf die beiden durch (II) verbundenen Koordinatensysteme, so müssen also x_1 und x_2 in lineare Funktionen von t' übergehen, wenn man für x'_1, x'_2 lineare Funktionen von t' einsetzt. Daraus folgt ohne weiteres, daß die α_{ik} Konstante und α_1, α_2 lineare Funktionen von t sein müssen; d. h. das eine Cartesische Raumkoordinatensystem bewegt sich relativ zu dem andern in gleichförmiger Translation. Und nun zeigt sich umgekehrt: liegen zwei *solche* Koordinatensysteme $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ vor und gilt das Trägheitsprinzip und die Newtonsche Mechanik in bezug auf $\mathfrak{C}$, so gilt sie auch in bezug auf $\mathfrak{C}'$. Zwei für die Mechanik »zulässige« Koordinatensysteme hängen demnach durch die Formeln zusammen

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \gamma_1 t' + \alpha_1 \,, \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \gamma_2 t' + \alpha_2 \,, \\ \;\; t = \qquad\qquad\qquad\qquad\; t' + a \,, \end{cases}$$

in denen die α_{ik} konstante Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind, a, α_i und γ_i aber beliebige Konstante; und jede Transformation von dieser Art stellt den Übergang von einem zulässigen Koordinatensystem zu einem andern dar (*Galilei-Newtonsches Relativitätsprinzip*). Das Wesentliche daran ist, wenn wir von der ja selbstverständlichen Willkürlichkeit der Achsenrichtungen im Raum und des Anfangspunktes absehen, daß Invarianz stattfindet gegenüber den Transformationen

$$(1) \qquad x_1 = x_1' + \gamma_1 t', \qquad x_2 = x_2' + \gamma_2 t', \qquad t = t'.$$

In unserm graphischen Bild (s. Fig. 7) würden $x_1' \, x_2' \, t'$ die Koordinaten in bezug auf ein geradliniges Achsenkreuz sein, bei welchem die x_1', x_2' mit den x_1, x_2 Achsen zusammenfallen, hingegen die neue t'-Achse eine irgendwie geänderte Richtung hat. Daß sich die Gesetze der Newtonschen Mechanik bei diesem Übergang vom Koordinatensystem $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{C}'$ nicht ändern, sehen wir so ein. Nach dem Attraktionsgesetz ist die Gravitationskraft, mit der ein Massenpunkt in einem Augenblicke auf einen andern wirkt, ein vom Koordinatensystem unabhängiger Vektor im Raum (so wie der Vektor, welcher die simultanen Lagen der beiden Massenpunkte miteinander verbindet). Dieselbe Größennatur muß auch jede Kraft von anderer physikalischer Herkunft besitzen, das gehört mit zu den Voraussetzungen der Newtonschen Mechanik; sie verlangt zur Ausfüllung ihres Kraftbegriffs eine dieser Voraussetzung genügende Physik. Man überzeuge sich etwa in der Elastizitätstheorie davon, daß die Spannungskräfte (zufolge ihres Zusammenhanges mit den Deformationsgrößen) von der geforderten Art sind. — Die Masse ist ein vom Koordinatensystem unabhängiger Skalar. Endlich ist wegen der aus (1) für die Bewegung eines Massenpunktes sich ergebenden Transformationsformeln

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1'}{dt'} + \gamma_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2'}{dt'} + \gamma_2; \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2x_2'}{dt'^2}$$

zwar nicht die Geschwindigkeit, wohl aber die Beschleunigung ein vom Koordinatensystem unabhängiger Raumvektor. Demnach hat das Grundgesetz »Masse mal Beschleunigung = Kraft« die behauptete invariante Beschaffenheit.

Nach der Newtonschen Mechanik bewegt sich der Schwerpunkt jedes abgeschlossenen, keiner Einwirkung von außen unterliegenden Massensystems in gleichförmiger Translation. Betrachten wir die Sonne mit ihren Planeten als ein solches System, so hat es also keinen Sinn, zu fragen, ob der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht oder sich in gleichförmiger Translation befindet. Wenn die Astronomen trotzdem behaupten, daß die Sonne sich auf einen Punkt im Sternbild des Herkules zu bewege, so stützen sie diese ihre Behauptung auf die statistische Beobachtung, daß die Sterne in jener Gegend sich im Durchschnitt von einem gewissen Zentrum aus zu entfernen scheinen — so wie eine Baumgruppe auseinander tritt, der ich mich nähere; daraus folgt ihre Aussage, wenn es sicher ist, daß die Sterne im Durchschnitt ruhen, d. h. daß der Schwer-

punkt des Fixsternhimmels ruht: es handelt sich also um eine Aussage über die relative Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems zu dem des Fixsternhimmels.

Man muß sich, um den wahren Sinn des Relativitätsprinzips aufzufassen, durchaus daran gewöhnen, nicht »im Raum« und nicht »in der Zeit«, sondern »in der Welt«, in *Raum-Zeit* zu denken. Nur das Zusammenfallen (bzw. das unmittelbare Benachbartsein) zweier Ereignisse in Raum-Zeit hat einen unmittelbar evidenten Sinn; daß sich hier Raum und Zeit nicht in absoluter Weise voneinander trennen lassen, ist eben die Behauptung des Relativitätsprinzips. Im Sinne der mechanischen Weltauffassung, nach der alles physikalische Geschehen letztlich auf Mechanik zurückgeht, nehmen wir an, daß nicht nur die Mechanik, sondern die gesamte physikalische Gesetzmäßigkeit der Natur dem Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzip untertan ist, *daß es also unmöglich ist*, *ohne Aufweisung individueller Gegenständlichkeiten unter den für die Mechanik gleichberechtigten Bezugssystemen*, *von denen je zwei durch Transformationsformeln* (III) *verknüpft sind*, *eine engere Auswahl zu treffen.* Dann wird durch diese Formeln in genau dem gleichen Sinne *die Geometrie der vierdimensionalen Welt* festgelegt, wie durch die Gruppe der Übergangssubstitutionen, die zwischen zwei Cartesischen Koordinatensystemen vermitteln, die Euklidische Geometrie des dreidimensionalen Raumes festgelegt wird: eine Beziehung zwischen Weltpunkten hat dann und nur dann eine objektive Bedeutung, wenn sie durch solche arithmetische Relationen zwischen den Koordinaten der Punkte definiert ist, die invariant sind gegenüber den Transformationen (III). Vom Raume sagt man, er sei *homogen* in allen Punkten und in jedem Punkte homogen in allen Richtungen; diese Behauptungen sind aber nur Teile der *vollständigen Homogeneïtätsaussage*, daß alle Cartesischen Koordinatensysteme gleichberechtigt sind. Ebenso wird durch das Relativitätsprinzip festgestellt, in welchem genauen Sinne die Welt (= Raum-Zeit als »Form« der Erscheinungen, nicht ihrem »zufälligen«, inhomogenen materialen Gehalt nach) homogen ist.

Es ist merkwürdig genug, daß zwei mechanische Vorgänge, die kinematisch vollständig gleich sind, in dynamischer Hinsicht verschieden sein können, wie die Gegenüberstellung des viel weiteren kinematischen Relativitätsprinzips (II) und des dynamischen (III) lehrt: eine für sich allein existierende rotierende Flüssigkeitskugel oder ein rotierendes Schwungrad ist an sich nicht von einer ruhenden Kugel oder einem ruhenden Schwungrad verschieden; trotzdem plattet sich die »rotierende« Kugel ab, die ruhende nicht; trotzdem treten in dem rotierenden Schwungrad Spannungen auf, ja es zerspringt bei hoher Rotationsgeschwindigkeit, an einem ruhenden geschieht nichts dergleichen. Als die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens können wir nur die »*Weltmetrik*« bezeichnen, die sich in den Zentrifugalkräften als eine wirkende Potenz offenbart. Von hier aus fällt ein helles Licht zurück auf den Riemannschen Gedanken: wenn

der Metrik (hier freilich der Weltmetrik, nicht dem metrischen Fundamentaltensor des Raumes) etwas genau so Reales, durch Kräfte auf die Materie Wirkendes entspricht wie etwa dem Maxwellschen Spannungstensor, so muß man annehmen, daß auch umgekehrt die Materie auf dieses Reale zurückwirkt. Erst in Kap. IV werden wir diese Idee wieder aufnehmen.

An den Transformationsformeln (III) heben wir zunächst nur ihre Linearität hervor: sie besagt, daß *die Welt ein vierdimensionaler affiner Raum* ist. Zur systematischen Darstellung seiner Geometrie benutzen wir demnach neben den Weltpunkten die *Welt-Vektoren* oder Verschiebungen. Eine Verschiebung der Welt ist eine Abbildung, die jedem Weltpunkt P einen Weltpunkt P' zuordnet; aber eine Abbildung von besonderer Art, nämlich eine solche, die sich in einem zulässigen Koordinatensystem durch Gleichungen

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

ausdrückt; dabei bedeuten x_i die vier Zeit-Raum-Koordinaten von P (es ist x_0 anstelle von t geschrieben), x'_i diejenigen von P' in jenem Koordinatensystem, die a_i sind irgendwelche Konstanten. Der Begriff ist unabhängig von der Wahl des zulässigen Koordinatensystems. Die Verschiebung, welche P in P' überführt, wird mit $\overrightarrow{PP'}$ bezeichnet. Es gelten für die Welt-Punkte und -Verschiebungen die sämtlichen Axiome der affinen Geometrie mit der Dimensionszahl $n = 4$. Das Galileische Trägheitsprinzip ist ein affines Gesetz; es sagt, durch welche Bewegungen die geraden Linien unseres vierdimensionalen affinen Raums »Welt« realisiert werden, nämlich durch die kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte.

Von dem *affinen* Standpunkt gehen wir zum *metrischen* über. Aus unserer graphischen Darstellung, die (mit Unterdrückung einer Koordinate) ein affines Bild der Welt entwarf, lesen wir ihre wesentliche metrische Struktur ab, die ganz anders ist als die des Euklidischen Raumes: die Welt ist »geschichtet«; die Ebenen $t =$ konst. in ihr haben eine absolute Bedeutung. Nach Wahl einer Maßeinheit für die Zeit kommt je zwei Weltpunkten A, B ein bestimmter Zeitunterschied zu, die Zeitkomponente des Vektors $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{x}$; sie ist, wie allgemein die Vektorkomponenten in einem affinen Koordinatensystem, eine lineare Form $t(\mathfrak{x})$ des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x}$. Der Vektor $\mathfrak{x}$ weist in die Vergangenheit oder die Zukunft, je nachdem $t(\mathfrak{x})$ negativ oder positiv ist. Von zwei Weltpunkten A, B ist A früher, gleichzeitig oder später als B, je nachdem

$$t(\overrightarrow{AB}) > 0, = 0 \text{ oder } < 0$$

ausfällt. — In jeder »Schicht« aber gilt die Euklidische Geometrie; sie beruht auf einer definiten quadratischen Form, die jedoch hier nur definiert ist für diejenigen Weltvektoren $\mathfrak{x}$, die in einer Schicht liegen, d. h. der Gleichung $t(\mathfrak{x}) = 0$ genügen (denn es hat nur einen Sinn, von dem Abstand der *gleichzeitigen* Lagen zweier Massenpunkte zu reden). Während also der Euklidischen Metrik eine positiv-definite quadratische Form zugrunde liegt, *beruht die Galileische Metrik*

1. *auf einer Linearform* $t(\mathfrak{x})$ *des willkürlichen Vektors* $\mathfrak{x}$ (der »Zeitdauer« der Verschiebung $\mathfrak{x}$), *und*

2. *einer nur innerhalb der dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit aller Vektoren* $\mathfrak{x}$, *welche der Gleichung* $t(\mathfrak{x}) = 0$ *genügen, definierten positiv-definiten quadratischen Form* $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ (dem Quadrat der »Länge« von $\mathfrak{x}$).

Zur anschaulichen Darlegung physikalischer Verhältnisse können wir die Einführung eines bestimmten Bezugsraumes nicht entbehren. Sie hängt ab von der Wahl einer willkürlichen Verschiebung $\mathfrak{e}$ in der Welt (derjenigen, in welche bei der graphischen Darstellung die Zeitachse hineinfällt) und wird dann durch die Übereinkunft bewerkstelligt, daß alle Weltpunkte, die auf einer Geraden der Richtung $\mathfrak{e}$ liegen, in *denselben* Raumpunkt fallen. Es handelt sich also, geometrisch gesprochen, um nichts anderes als den Vorgang der *Parallelprojektion.* Zum Zwecke einer angemessenen Formulierung schicke ich darüber einige geometrische Erörterungen voraus, die sich auf einen beliebigen n-dimensionalen affinen Raum beziehen. Knüpfen wir im Interesse der Anschaulichkeit zunächst an den Fall $n = 3$ an. Es sei im Raum eine Schar von Geraden gezogen, die dem Vektor $\mathfrak{e}$ ($\neq 0$) parallel sind. Blickt jemand in Richtung dieser Strahlen in den Raum hinein, so werden für ihn alle diejenigen Raumpunkte zusammenfallen, die in Richtung einer solchen Geraden hintereinander liegen; dabei ist es durchaus nicht nötig, eine Ebene zu geben, *auf* die projiziert wird. Wir definieren also:

Es sei gegeben ein von 0 verschiedener Vektor $\mathfrak{e}$. Von zwei Punkten A und A', für die $\overrightarrow{AA'}$ ein Multiplum von $\mathfrak{e}$ ist, werde gesagt, sie fallen in ein und denselben Punkt $\boldsymbol{A}$ des durch $\mathfrak{e}$ bestimmten Unterraums. Wir können $\boldsymbol{A}$ darstellen durch die zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade, auf der alle jene im Unterraum zusammenfallenden Punkte A, A', ... liegen. Da jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ des Raumes eine zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade wieder in eine solche überführt, ruft $\mathfrak{x}$ eine bestimmte Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ des Unterraums hervor; aber je zwei Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ fallen im Unterraum zusammen, wenn ihr Unterschied ein Multiplum von $\mathfrak{e}$ ist. Der Übergang zum Unterraum, die »Projektion in Richtung von $\mathfrak{e}$«, werde an den Symbolen für Punkte und Verschiebungen durch Fettdruck gekennzeichnet. Durch Projektion gehen

$$\lambda\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}+\mathfrak{y},\ \overrightarrow{AB} \text{ über in } \lambda\boldsymbol{\mathfrak{x}},\ \boldsymbol{\mathfrak{x}}+\boldsymbol{\mathfrak{y}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{AB}};$$

d. h. die Projektion trägt affinen Charakter, und im Unterraum gilt die affine Geometrie mit einer um 1 geringeren Dimensionszahl als im ursprünglichen »Vollraum«.

Ist der Raum ein *metrischer* im Euklidischen Sinne, d. h. liegt ihm als metrische Fundamentalform eine nicht-ausgeartete quadratische Form $Q(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ zugrunde — für die Anschauung halte man sich an den Fall, wo Q positiv-definit ist, die Ausführungen gelten aber allgemein —, so werden wir den beiden Punkten des Unterraums, als die wir zwei zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade erblicken, wenn wir in der Richtung von $\mathfrak{e}$ in den Raum

hineinschauen, offenbar einen Abstand gleich dem senkrechten Abstand der beiden Geraden zuschreiben. Das werde analytisch formuliert. Vorausgesetzt ist: $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = e \neq 0$. Jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ kann in eindeutig bestimmter Weise in zwei Summanden gespalten werden

$$\mathfrak{x} = \xi\mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*, \tag{2}$$

deren erster proportional, deren zweiter orthogonal zu $\mathfrak{e}$ ist:

$$(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) = 0\,, \qquad \xi = \frac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,. \tag{3}$$

Wir nennen ξ die *Höhe* der Verschiebung $\mathfrak{x}$ (den Höhenunterschied von A und B, wenn $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$). Es gilt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)\,. \tag{4}$$

$\mathfrak{x}$ kann vollständig charakterisiert werden durch Angabe seiner Höhe ξ und der durch $\mathfrak{x}$ im Unterraum hervorgerufenen Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$; wir schreiben

$$\mathfrak{x} = \xi \,|\, \boldsymbol{\mathfrak{x}}\,.$$

Der Vollraum ist »zerspalten« in Höhe und Unterraum, der »Lage-Unterschied« $\mathfrak{x}$ zweier Punkte im Vollraum in den Höhenunterschied ξ und Lagenunterschied $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ im Unterraum; nicht nur die Behauptung des Zusammenfallens zweier Punkte im Raum hat einen Sinn, sondern auch die Aussage: zwei Punkte fallen im Unterraum zusammen, bzw. befinden sich in der gleichen Höhe. Jede Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ des Unterraums wird durch eine und *nur eine* zu $\mathfrak{e}$ orthogonale Verschiebung $\mathfrak{x}^*$ des Vollraums hervorgerufen; die Beziehung zwischen $\mathfrak{x}^*$ und $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ ist umkehrbar-eindeutig und affin. Durch die Definitionsgleichung

$$(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)$$

erteilen wir dem Unterraum eine auf der quadratischen Fundamentalform $(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}})$ beruhende Metrik. Dann geht (4) über in die Pythagoreische Fundamentalgleichung

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = e\xi^2 + (\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}), \tag{5}$$

die sich für zwei Verschiebungen bei einer ohne weiteres verständliche Bezeichnung zu

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = e\xi\eta + (\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{y}}) \tag{5'}$$

verallgemeinern läßt.

Diese Ausführungen sind hier, soweit sie den affinen Raum betreffen unmittelbar anzuwenden: der Vollraum ist die vierdimensionale Welt, ist irgendein in die Zukunft weisender Vektor, der Unterraum das, was wir gemeinhin den *Raum* nennen. Je zwei Weltpunkte, die auf eine zu $\mathfrak{e}$ parallelen Weltgeraden liegen, fallen in den gleichen Raumpunk Dieser Raumpunkt kann durch die zu $\mathfrak{e}$ parallele Gerade graphisch dargestel werden, und er kann durch einen ruhenden Massenpunkt, d. h. einen solche dessen Weltlinie eben jene Gerade ist, dauernd markiert werden. — Wa aber die Metrik betrifft, so ist diese nach dem Galileischen Relativität

prinzip von andrer Art, als wir eben angenommen hatten; darum sind folgende Modifikationen anzubringen. Jede Weltverschiebung $\mathfrak{x}$ hat eine bestimmte Zeitdauer $t(\mathfrak{x}) = t$ (welche an Stelle der »Höhe« in unsern geometrischen Auseinandersetzungen tritt) und erzeugt im Unterraum eine Verschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$; spaltet demnach gemäß der Unterscheidung von Zeit und Raum nach der Formel

$$\mathfrak{x} = t \mid \boldsymbol{\mathfrak{x}}.$$

Insbesondere kann jede Raumverschiebung $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ durch eine und nur eine Weltverschiebung $\mathfrak{x}^*$ hervorgerufen werden, welche der Gleichung $t(\mathfrak{x}^*) = 0$ genügt. Durch die für solche Vektoren $\mathfrak{x}^*$ definierte quadratische Form $(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*)$ empfängt der Raum seine Euklidische Metrik:

$$(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}^*).$$

Der Raum ist abhängig von der Projektionsrichtung; in der Realität kann die Projektionsrichtung durch irgend einen in gleichförmiger Translation begriffenen Massenpunkt (oder den Schwerpunkt eines abgeschlossenen isolierten Massensystems) festgelegt werden.

Wir haben diese Dinge mit solcher pedantischen Genauigkeit auseinandergesetzt, um für das Einsteinsche Relativitätsprinzip, dem gegenüber unsre Anschauung zunächst in ganz anderm Maße als gegenüber dem Galileischen versagt, wenigstens mit einer abgeklärten, auf diesen Fall ohne weiteres übertragbaren mathematischen Begriffsbildung gewappnet zu sein.

Wir lenken zurück ins physikalische Fahrwasser. Durch die Entdeckung der *endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes* wurde der naiven Ansicht, die Dinge seien gleichzeitig mit ihrer Wahrnehmung, der Boden entzogen. Da wir kein rascheres Zeitübertragungsmittel besitzen als das Licht selber (oder die drahtlose Telegraphie), ist es natürlich unmöglich, die Lichtgeschwindigkeit durch Messung der Zeit festzustellen, welche vergeht, bis das von einer Station A ausgesandte Lichtsignal bei einer andern Station B eintrifft. Roemer (1675) erschloß sie aus der scheinbaren Unregelmäßigkeit in der Umlaufszeit der Jupitermonde, welche genau die Periode eines Jahres aufwies; denn es erschien absurd, einen Wirkungszusammenhang zwischen Erde und Jupitermond anzunehmen, der die Periode des Erdumlaufs als eine Störung von so erheblicher Größe auf die Jupitermonde überträgt. Fizeau bestätigte die Entdeckung durch irdische Messung; seine Methode beruht auf dem einfachen Gedanken, die Empfangsstation B mit der Sendestation A zusammenfallen zu lassen und den Lichtstrahl von A durch Spiegelung nach A zurückzuleiten. Nach diesen Messungen haben wir anzunehmen, daß das Licht sich um das Erregungszentrum in konzentrischen Kugeln mit einer konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet. In unserer graphischen Darstellung würde (wiederum mit Unterdrückung einer Raumkoordinate) die Ausbreitung eines im Weltpunkt O gegebenen Lichtsignals durch den in Fig. 7 eingetragenen geraden Kreiskegel mit der Gleichung

$$c^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0 \qquad (6)$$

abgebildet werden: jede Ebene $t =$ konst. schneidet den Kegel in dem Kreis derjenigen Punkte, bis zu denen im Momente t das Lichtsignal gelangt ist; der Gleichung (6) (mit dem Zusatz $t > 0$) genügen alle und nur die Weltpunkte, in denen das Lichtsignal eintrifft. Wieder entsteht die Frage, was für ein Bezugsraum dieser Beschreibung des Vorganges zugrunde liegt. Die *Aberration der Fixsterne* zeigt, daß die Erde relativ zu ihm sich so bewegt, wie es nach der Newtonschen Theorie der Fall ist, d. h. daß er mit einem zulässigen Bezugsraum im Sinne der Newtonschen Mechanik zusammenfällt. Nun ist die Ausbreitung in konzentrischen Kugeln aber gewiß nicht invariant gegenüber den Galilei-Transformationen (III); denn eine schief gezeichnete t'-Achse schneidet in unserer Figur die Ebenen $t =$ konst. in Punkten, die exzentrisch zu den Ausbreitungskreisen liegen. Trotzdem ist dies kein Einwand gegen das Galileische Relativitätsprinzip, wenn gemäß den Vorstellungen, welche die Physik lange beherrscht haben, die Fortpflanzung des Lichtes in einem materiellen Träger geschieht, dem *Lichtäther*, dessen einzelne Teile gegeneinander bewegbar sind. Es verhält sich dann mit dem Licht genau so wie mit den konzentrischen Wellenkreisen auf einer Wasserfläche, die durch einen hineingeworfenen Stein erzeugt werden; aus diesem Phänomen kann gewiß nicht der Schluß gezogen werden, daß die hydrodynamischen Gleichungen dem Galileischen Relativitätsprinzip widerstreiten. Denn das Medium selber, das Wasser bzw. der Äther, dessen einzelne Teile von den verhältnismäßig kleinen Schwingungen abgesehen, gegeneinander ruhen, gibt dasjenige Bezugssystem ab, auf welches sich die Aussage der konzentrischen Ausbreitung bezieht.

Zur weiteren Diskussion dieser Frage wollen wir die Optik in denjenigen theoretischen Zusammenhang einfügen, in den sie seit Maxwell unlösbar hineingehört: die Theorie zeitlich veränderlicher elektromagnetischer Felder.

§ 19. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder. Lorentzsches Relativitätstheorem.

Der Übergang von den stationären elektromagnetischen Feldern (§ 9) zu zeitlich veränderlichen hat folgendes gelehrt:

1) Der sog. elektrische Strom besteht tatsächlich aus bewegter Elektrizität: ein geladener rotierender Drahtring erzeugt ein Magnetfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz. Ist die Ladungsdichte ϱ, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so ist die Stromdichte $\mathfrak{s}$ dieses Konvektionsstromes offenbar $= \varrho\,\mathfrak{v}$; doch muß sie, damit das Biot-Savartsche Gesetz genau in der alten Form gültig bleibt, in einer andern Maßeinheit gemessen werden, es ist also zu setzen $\mathfrak{s} = \frac{\varrho\,\mathfrak{v}}{c}$, wo c eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit ist. Das schon von Weber und Kohlrausch angestellte, später von Rowland und Eichenwald wiederholte Experiment ergab für c einen Wert, der innerhalb der Beobachtungsfehler mit d

Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt[2]). Man bezeichnet $\frac{\varrho}{c} = \varrho'$ als das elektromagnetische Maß der Ladungsdichte und, damit auch in elektromagnetischen Maßeinheiten die elektrische Kraftdichte $= \varrho' \mathfrak{E}'$ ist, $\mathfrak{E}' = c\,\mathfrak{E}$ als das elektromagnetische Maß der Feldstärke.

2) Durch ein veränderliches Magnetfeld wird in einem homogenen Draht ein Strom induziert. Er kann auf Grund des Materialgesetzes $\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$ und des *Faradayschen Induktionsgesetzes* bestimmt werden, welches aussagt, daß die induzierte elektromotorische Kraft gleich der zeitlichen Abnahme des durch den Leiter hindurchtretenden magnetischen Induktionsflusses ist; es gilt also

$$(7) \qquad \int \mathfrak{E}' d\mathfrak{r} = -\frac{d}{dt}\int B_n\, do$$

(links steht das Linienintegral über eine geschlossene Kurve, rechts das Oberflächenintegral der normalen Komponente der Magnetinduktion $\mathfrak{B}$, erstreckt über eine in diese Kurve eingespannte Fläche). Der Induktionsfluß ist durch die Leiterkurve eindeutig bestimmt, weil

$$(8') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

ist (es gibt keinen wahren Magnetismus). Der Stokessche Satz ergibt aus (7) das Differentialgesetz

$$(8) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0\,.$$

Die im statischen Falle gültige Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ erweitert sich also durch das auf der linken Seite hinzutretende, nach der Zeit differentiierte Glied $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$. Auf ihm beruht unsere ganze Elektrotechnik, und die Notwendigkeit seiner Einführung ist daher durch die Erfahrung auf das beste gestützt.

3) Hypothetisch war hingegen zu Maxwells Zeit dasjenige Glied, durch welches Maxwell die magnetische Grundgleichung

$$(9) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{J}$$

erweiterte. In einem zeitlich veränderlichen Feld, etwa bei der Entladung eines Kondensators kann nicht $\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0$ sein, sondern es muß statt dessen die »Kontinuitätsgleichung«

$$(10) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{J} = 0$$

gelten, in der die Tatsache, daß der Strom aus bewegter Elektrizität besteht, zum Ausdruck kommt. Da $\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$ ist, wird mithin nicht $\mathfrak{J}$, wohl aber $\mathfrak{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ quellenfrei sein, und es liegt demnach sehr nahe, die Gleichung (9) im zeitlich veränderlichen Feld durch

$$(11) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{J}$$

zu ersetzen. Daneben gilt nach wie vor

(11') $$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.$$

Aus (11) und (11') folgt jetzt umgekehrt die Kontinuitätsgleichung (1
Auf dem nach der Zeit differentiierten Zusatzgliede $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ (dem Maxwe
schen »*Verschiebungsstrom*«) beruht es, daß elektromagnetische Erregung im Äther mit der endlichen Geschwindigkeit c sich ausbreiten; es bild also die Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie, welche d optischen Erscheinungen in so wunderbarer Weise hat deuten könne und findet in den bekannten Hertzschen Versuchen und der modern drahtlosen Telegraphie eine direkte experimentelle Bestätigung (und tec nische Ausnutzung). Danach ist es auch klar, daß diesen Gesetzen d jenige Bezugsraum zugrunde liegt, in welchem der Satz von der ko zentrischen Ausbreitung des Lichtes gültig ist, der »ruhende« Lichtäth — Zu den Maxwellschen Feldgleichungen (8) und (8'), (11) und (1 treten die Materialgesetze.

Wir wollen aber hier nur die Zustände im Äther betrachten; da

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{B},$$

und die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$(12_{\mathrm{I}}) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0;$$

$$(12_{\mathrm{II}}) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{s}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho.$$

Die atomistische Elektronentheorie betrachtet sie als die allgemein gülti exakten Naturgesetze. Sie setzt außerdem $\mathfrak{s} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$, wo $\mathfrak{v}$ die Geschwind keit der Materie bedeutet, an der die elektrische Ladung haftet.

Die auf die Massen wirkende *Kraft* besteht aus dem vom elektrisc und vom Magnetfeld herrührenden Bestandteil; ihre Dichte ist

(13) $$\mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{s}\mathfrak{B}].$$

Da $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{v}$ parallel ist, ergibt sich für die pro Zeit- und Volumein an den Elektronen geleistete Arbeit der Wert

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{v} = \varrho \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{v} = c(\mathfrak{s}\mathfrak{E}) = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'.$$

Sie wird zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen verwen die sich durch die Zusammenstöße zum Teil auf die neutralen Mole überträgt. Phänomenologisch tritt diese verstärkte molekulare Bewe im Innern des Leiters als *Joulesche Wärme* in Erscheinung. In der lehrt ja die Beobachtung, daß $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}'$ die pro Zeit- und Volumein vom Strom erzeugte Wärmemenge ist; dieser Energieverbrauch muß d die stromerzeugende Maschine gedeckt werden. Multiplizieren wir Gleichung (12_{I}) mit $-\mathfrak{B}$, die Gleichung (12_{II}) mit $\mathfrak{E}$ und addieren kommt

$$-c\cdot\operatorname{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}^2\right)=c(\mathfrak{s}\mathfrak{E})\,.$$

Setzen wir

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]=\mathfrak{S}\,,\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}^2=W$$

und integrieren über irgend ein Volumen V, so lautet diese Gleichung

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V W\,dV+c\int\limits_\Omega S_n\,do=\int\limits_V c(\mathfrak{s}\mathfrak{E})\,dV\,;$$

das zweite Glied links ist das über die begrenzende Oberfläche Ω von V erstreckte Integral der nach der inneren Normale genommenen Komponente S_n von $\mathfrak{S}$. Auf der rechten Seite steht hier die im Volumen V pro Zeiteinheit geleistete Arbeit; sie wird kompensiert durch die Abnahme der in V enthaltenen Feldenergie $\int W\,dV$ und durch die von außen dem Raumstück V zufließende Energie. Unsere Gleichung enthält also das *Energiegesetz; durch sie bestätigt sich endgültig unser früherer Ansatz für die Dichte W der Feldenergie* und ergibt sich ferner, daß $c\mathfrak{S}$, der sog. Poyntingsche Vektor, den *Energiestrom* darstellt.

Die Feldgleichungen (12) sind von Lorentz unter der Voraussetzung, daß die Verteilung der Ladungen und des Stromes bekannt ist, in folgender Weise integriert worden. Der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{B}=0$ wird durch den Ansatz

(14) $$-\mathfrak{B}=\operatorname{rot}\mathfrak{f}$$

($-\mathfrak{f}$ = Vektorpotential) genügt. Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich dann, daß $\mathfrak{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t}$ wirbelfrei ist, und also kann man setzen

(15) $$\mathfrak{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t}=\operatorname{grad}\varphi$$

($-\varphi$ das skalare Potential). Die Willkür, mit der die Bestimmung von $\mathfrak{f}$ behaftet ist, können wir zur Erfüllung der Nebenbedingung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathfrak{f}=0$$

ausnutzen, die sich hier als die zweckmäßige erweist (während wir im stationären Feld $\operatorname{div}\mathfrak{f}=0$ nahmen). Führen wir die Potentiale in die beiden letzten Gleichungen ein, so liefert eine einfache Rechnung

(16) $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\Delta\varphi=\varrho\,,$$

(16′) $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial t^2}+\Delta\mathfrak{f}=\mathfrak{s}\,.$$

Eine Gleichung von der Form (16) zeigt eine Wellenausbreitung mit der Geschwindigkeit c an. In der Tat: wie die Poissonsche Gleichung $\Delta\varphi=\varrho$ die Lösung hat

$$-4\pi\varphi=\int\frac{\varrho}{r}\,dV,$$

so lautet die Lösung von (16):

$$-4\pi\varphi = \int \frac{\varrho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV;$$

hier steht auf der linken Seite der Wert von φ in einem Punkte O zur Zeit t; r ist die Entfernung des Quellpunktes P, über den integriert wird, vom Aufpunkt O, und unter dem Integral tritt der Wert von ϱ im Punkte P zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ auf. Ebenso ist die Lösung von (16')

$$-4\pi\mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{s}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV.$$

Das Feld in einem Punkte hängt also nicht ab von der Ladungs- und Stromverteilung im gleichen Moment, sondern maßgebend ist für jede Stelle der Augenblick, der um so viel $\left(\frac{r}{c}\right)$ zurückliegt, als die mit der Geschwindigkeit c sich ausbreitende Wirkung gebraucht, um vom Quellpunkt bis zum Aufpunkt zu gelangen.

Wie der Potentialausdruck (in Cartesischen Koordinaten)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

invariant ist gegenüber linearen Transformationen der Variablen $x_1 x_2 x_3$, welche die quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen, so ist der beim Übergang vom statischen zu einem zeitlich veränderlichen Feld an seine Stelle tretende Ausdruck

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

invariant gegenüber solchen linearen Transformationen der vier Koordinaten t, $x_1 x_2 x_3$, den sog. Lorentz-Transformationen, welche die indefinite Form

$$(17) \qquad -c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführen. Lorentz erkannte, daß nicht nur die Gleichung (16), sondern *das ganze System der elektromagnetischen Gesetze für den Äther diese Invarianzeigenschaft besitzt, daß sie sich nämlich ausdrücken durch invariante Relationen zwischen Tensoren in einem vierdimensionalen affinen Raum mit den Koordinaten* t, $x_1 x_2 x_3$, *in den durch die Form* (17) *eine (indefinite) Metrik eingetragen ist: Lorentzsches Relativitätstheorem.*

Zum Beweise ändern wir die Maßeinheit der Zeit, indem wir setzen $ct = x_0$. Die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform sind dann

$$g_{ik} = 0 \ (i \neq k); \quad g_{ii} = \varepsilon_i,$$

wo $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ ist. Beim Übergang von den in bezug auf einen Index i kovarianten zu den kontravarianten Komponenten eines Tensors ist die i^{te} Komponente also lediglich mit dem Vorzeichen ε_i zu multiplizieren. Die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität (10) gewinnt die gewünschte invariante Form

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

wenn wir

$$s^0 = \varrho\,; \quad s^1,\ s^2,\ s^3 \text{ gleich den Komponenten von } \mathfrak{s}$$

als die vier kontravarianten Komponenten eines Vektors in jenem vierdimensionalen Raum einführen, des »Viererstroms«. Parallel damit — vgl. (16), (16') — müssen wir

$$\varphi^0 = \varphi \text{ und die Komponenten von } \mathfrak{f}\colon \varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3$$

zu den kontravarianten Komponenten eines vierdimensionalen Vektors vereinigen, den wir als elektromagnetisches Potential bezeichnen; von seinen kovarianten Komponenten ist die 0te $\varphi_0 = -\varphi$, die drei andern φ_1, φ_2, φ_3 sind gleich den Komponenten von $\mathfrak{f}$. Dann lassen sich die Gleichungen (14), (15), durch welche die Feldgrößen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ aus den Potentialen entspringen, in der invarianten Form schreiben

(18) $$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik},$$

wo

$$\mathfrak{E} = (F_{10},\ F_{20},\ F_{30}), \quad \mathfrak{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12})$$

gesetzt ist. In dieser Weise hat man also elektrische und magnetische Feldstärke zu einem einzigen Flächentensor 1. Stufe F, dem »Felde«, zusammenzufassen. Aus (18) ergeben sich die invarianten Gleichungen

(19) $$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

und dies ist das erste System der Maxwellschen Gleichungen (12_1). Den Umweg über die Lorentzsche Lösung mit Hilfe der Potentiale haben wir lediglich eingeschlagen, um naturgemäß auf die richtige Art der Zusammenfassung der dreidimensionalen Größen zu vierdimensionalen Vektoren und Tensoren geführt zu werden. Bei Übergang zu kontravarianten Komponenten ist

$$\mathfrak{E} = (F^{01},\ F^{02},\ F^{03}), \quad \mathfrak{B} = (F^{23},\ F^{31},\ F^{12}).$$

Das zweite System der Maxwellschen Gleichungen lautet jetzt in invarianter vierdimensionaler Tensorschreibweise:

(20) $$\sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i.$$

Führen wir den vierdimensionalen Vektor mit den kovarianten Komponenten

(21) $$p_i = F_{ik}\, s^k$$

(und den kontravarianten

$$p^i = F^{ik} s_k)$$

ein — nach früherem Brauch lassen wir die Summenzeichen wieder fort — so ist p^0 die »Leistungsdichte«, die Arbeit pro Zeit- und Volumeinheit: $p^0 = (\mathfrak{s}\mathfrak{E})$ [die Zeiteinheit ist hier dem neuen Zeitmaß $x_0 = ct$ anzupassen], und p^1, p^2, p^3 sind die Komponenten der Kraftdichte.

Damit ist das Lorentzsche Relativitätstheorem vollständig bewiesen. *Zugleich aber bemerken wir, daß die erhaltenen Gesetze genau so lauten wie die Gesetze des stationären Magnetfeldes* [§ 9, (72)], *nur vom dreidimensionalen auf den vierdimensionalen Raum übertragen.* Es ist kein Zweifel, daß in der vierdimensionalen Tensorformulierung ihre wahre mathematische Harmonie, die nicht vollkommener sein könnte, zutage tritt.

Daraus ergibt sich noch weiter, daß wir genau wie im dreidimensionalen Fall die »Viererkraft« p_i aus einem vierdimensionalen symmetrischen »Spannungstensor« S herleiten können:

$$(22) \qquad -p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \quad \text{oder} \quad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k};$$

$$(22') \qquad S_i^k = F_{ir} F^{kr} - \tfrac{1}{2}\delta_i^k |F|^2.$$

Das (hier nicht notwendig positive) Quadrat des Feldbetrages ist

$$|F|^2 = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik}.$$

Wir wollen die Formel (22) durch direktes Ausrechnen bestätigen. Es ist

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = F_{ir}\frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + F^{kr}\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2} F^{kr}\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}.$$

Der erste Term rechts ergibt

$$-F_{ir} s^r = -p_i;$$

der zweite wird, wenn man den Faktor von F^{kr} gleichfalls schiefsymmetrisch schreibt,

$$= \tfrac{1}{2} F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}\right)$$

und liefert mit dem dritten vereinigt

$$-\tfrac{1}{2} F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k}\right);$$

der dreiteilige Ausdruck in der Klammer ist nach (19) $= 0$.

$|F|^2$ ist $= \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2$. Sehen wir zu, was die einzelnen Komponenten von S^{ik} bedeuten, indem wir gemäß der Scheidung in Zeit und Raum den Index 0 von den übrigen 1, 2, 3 trennen.

S^{00} ist = der Energiedichte $W = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2)$,
S^{0i} = den Komponenten von $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{B}]$, $(i, k = 1, 2, 3)$
S^{ik} = den Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors,

der sich aus dem in § 9 angegebenen elektrischen und magnetischen Bestandteil zusammensetzt. Die 0te der Gleichungen (22) enthält demnach das Energiegesetz. Die 1., 2., 3. haben eine völlig analoge Gestalt. Bezeichnen wir einen Augenblick die Komponenten des Vektors $\frac{1}{c}\mathfrak{S}$ mit G^1, G^2, G^3 und verstehen unter $\mathfrak{t}^{(i)}$ den Vektor mit den Komponenten

$$S^{i1}, S^{i2}, S^{i3},$$

so haben wir

$$-p^i = \frac{\partial G^i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(i)}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{23}$$

Die Kraft, welche auf die in einem Raumgebiet V enthaltenen Elektronen wirkt, erzeugt eine ihr gleiche zeitliche Zunahme des Bewegungsimpulses derselben. Diese Zunahme wird nach (23) ausgeglichen durch eine entsprechende Abnahme des im Felde mit der Dichte $\frac{\mathfrak{S}}{c}$ verteilten *Feldimpulses* und den Zustrom des Feldimpulses von außen. Der Strom der i^{ten} Impulskomponente ist gegeben durch $\mathfrak{t}^{(i)}$, der *Impulsstrom* selber ist demnach nichts anderes als der Maxwellsche Spannungstensor. *Der Satz von der Erhaltung der Energie ist nur die eine, die Zeitkomponente eines gegenüber Lorentztransformationen invarianten Gesetzes, dessen Raumkomponenten die Erhaltung des Impulses aussagen.* Die gesamte Energie sowohl als der gesamte Impuls bleiben ungeändert; sie strömen nur im Felde hin und her und verwandeln sich aus Feldenergie und Feldimpuls in kinetische Energie und kinetischen Impuls der Materie et vice versa. Das ist die einfache anschauliche Bedeutung der Formeln (22). Ihr gemäß werden wir in Zukunft von dem Tensor S der vierdimensionalen Welt als dem *Energie-Impuls-Tensor* oder kurz Energietensor sprechen. Aus der Symmetrie desselben hat sich ergeben, daß die *Impulsdichte* $= \frac{1}{c^2}$ *mal dem Energiestrom* ist; der Feldimpuls ist daher sehr schwach, er konnte aber als Druck des Lichtes auf eine spiegelnde Fläche nachgewiesen werden. —

Eine Lorentztransformation ist linear, sie kommt daher (wenn wir in unserer graphischen Darstellung wiederum eine Raumkoordinate unterdrücken) auf die Einführung eines andern affinen Koordinatensystems hinaus. Überlegen wir uns, wie die Grundvektoren $\mathfrak{e}'_0$, $\mathfrak{e}'_1$, $\mathfrak{e}'_2$ des neuen Koordinatensystems liegen zu denen des alten $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, d. i. zu den Einheitsvektoren in Richtung der x_0 (oder t), x_1, x_2 Achse! Da für

$$\mathfrak{x} = x_0\mathfrak{e}_0 + x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 = x'_0\mathfrak{e}'_0 + x'_1\mathfrak{e}'_1 + x'_2\mathfrak{e}'_2:$$
$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 \,[= Q(\mathfrak{x})]$$

sein soll, ist $Q(\mathfrak{e}'_0) = -1$. Der von O aus aufgetragene Vektor $\mathfrak{e}'_0$ oder die t'-Achse liegt demnach im Innern des Kegels der Lichtausbreitung, die Parallelebenen $t' =$ konst. liegen so, daß sie aus dem Kegel Ellipsen

ausschneiden, deren Mittelpunkte auf der t'-Achse liegen (s. Fig. 7), di x_1', x_2' Achse haben die Richtung konjugierter Durchmesser dieser Schnitt ellipsen, so daß die Gleichung jeder von ihnen

$$x_1'^2 + x_2'^2 = \text{konst.}$$

lautet.

Solange man an der Vorstellung des materiellen, schwingungsfähige Äthers festhält, kann man in dem Lorentzschen Relativitätstheorem nu eine merkwürdige mathematische Transformationseigenschaft der Max wellschen Gleichungen erblicken; das wahrhaft gültige Relativitätstheore bleibt das Galilei-Newtonsche. Es entsteht aber die Aufgabe, nicht nu die optischen Erscheinungen, sondern die gesamte Elektrodynamik un ihre Gesetze als die Konsequenz einer dem Galileischen Relativitätsprinz genügenden Äthermechanik zu deuten, indem man die Feldgrößen einen bestimmten Zusammenhang mit Dichte und Geschwindigkeit d Äthers bringt. Vor Maxwells elektromagnetischer Lichttheorie hat ma diese Aufgabe bekanntlich für die optischen Erscheinungen mit teilweise aber niemals endgültigem Erfolg zu lösen versucht; für das umfassen Gebiet, in das nach Maxwell die optischen Erscheinungen eingeordn sind, hat man diesen Versuch nicht mehr unternommen[3]. Vielmehr b gann sich *die Vorstellung des im leeren Raume existierenden Feldes*, *d keines Trägers bedarf*, allmählich durchzusetzen; ja schon Faraday hat in klaren Worten die Auffassung ausgesprochen, daß sich nicht das Fe auf die Materie stützen müsse, sondern umgekehrt die Materie nich anderes sei als Stellen des Feldes von besonderem singulären Charakt

§ 20. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip.

Halten wir zunächst noch an der Äthervorstellung fest! Es muß mö lich sein, die Bewegung eines Körpers, z. B. der Erde, relativ zum ruhend Äther zu konstatieren. Die Aberration leistet das nicht; durch sie w vielmehr nur dargetan, daß jene relative Bewegung im Laufe des Jah *wechselt*. Es seien $A_1 O A_2$ drei feste Punkte der Erde, welche ihre B wegung mitmachen; sie mögen in gerader Linie, und zwar in der B wegungsrichtung der Erde, in gleichem Abstand $A_1 O = O A_2 = l$ a einanderfolgen, und v sei die Translationsgeschwindigkeit der Erde du den Äther; $\frac{v}{c} = q$ ist (voraussichtlich) sehr klein. Ein in O aufgegebe Lichtsignal wird in A_2 nach Ablauf der Zeit $\frac{l}{c - v}$, in A_1 nach Abl der Zeit $\frac{l}{c + v}$ eintreffen. Leider kann man diesen Unterschied ni konstatieren, weil man über kein rascheres Signal als das Licht sel verfügt, um nach einem andern Orte die Zeit zu übermitteln. Wir hel uns durch den Fizeauschen Gedanken: wir bringen in A_1 und A_2 einen kleinen Spiegel an, der den Lichtstrahl nach O reflektiert. W

im Momente o das Lichtsignal in O gegeben, so wird das vom Spiegel A_2 reflektierte zur Zeit

$$\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2\,lc}{c^2-v^2}$$

in O wieder eintreffen, das vom Spiegel A_1 reflektierte aber zur Zeit

$$\frac{l}{c+v}+\frac{l}{c-v}=\frac{2\,lc}{c^2-v^2}.$$

Jetzt ist kein Unterschied mehr vorhanden. Nehmen wir aber einen dritten, die Translationsbewegung durch den Äther gleichfalls mitmachenden Punkt A auf der Erde an, so daß $OA = l$ ist, aber die Richtung OA mit der Bewegungsrichtung einen Winkel ϑ einschließt! In der Figur sind O, O', O'' die sukzessiven Orte des Punktes O zur Zeit o, wo das Lichtsignal abgeschickt wird, im Augenblick t', in welchem es von dem an der Stelle A' befindlichen Spiegel A reflektiert wird, und schließlich zur Zeit $t'+t''$, wo es wieder in O eintrifft. Aus der Figur geht die Proportion hervor

Fig. 8.

$$OA' : O''A' = OO' : O''O';$$

folglich sind die beiden Winkel bei A' einander gleich: der reflektierende Spiegel muß, wie im Falle der Ruhe, senkrecht zu der starren Verbindung OA gestellt werden, damit der Lichtstrahl nach O zurückkommt. Eine elementare trigonometrische Rechnung liefert für die *scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung* ϑ:

$$(24)\qquad \frac{2\,l}{t'+t''}=\frac{c^2-v^2}{\sqrt{c^2-v^2\sin^2\vartheta}}.$$

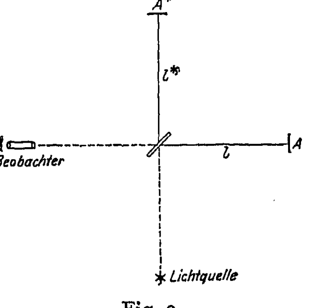


Fig. 9.

Sie ist also abhängig von dem Richtungswinkel ϑ; durch ihre Beobachtung muß sich Richtung und Größe von v feststellen lassen.

Die Ausführung dieser Beobachtung ist der berühmte *Michelsonsche Versuch* [4]). Es werden zwei mit O starr verbundene Spiegel A, A^* in den Entfernungen l, l^* angebracht, der eine in der Bewegungsrichtung, der andere senkrecht zu ihr. Die ganze Montierung ist um O drehbar. Mittels einer halbdurchlässig versilberten, den rechten Winkel bei O halbierenden Glasplatte wird in O ein Lichtstrahl in zwei gespalten, deren einer auf A, deren anderer auf A^* zuläuft; dort werden sie reflektiert und bei ihrer Ankunft in O mittels jener halbversilberten Glasplatte wieder in eine einzige Strahlenrichtung vereinigt. Es tritt Interferenz ein

(l und l^* sind nahezu einander gleich) wegen der aus (24) sich ergebenden Wegdifferenz

$$\frac{2\,l}{1-q^2} - \frac{2\,l^*}{\sqrt{1-q^2}}\,.$$

Dreht man jetzt das Gerüst langsam um 90°, bis A^* in die Bewegungsrichtung fällt, so geht diese Wegdifferenz stetig über in

$$\frac{2\,l}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{2\,l^*}{1-q^2}\,;$$

es tritt demnach eine Verminderung um

$$2\,(l+l^*)\left(\frac{1}{1-q^2} - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right) \sim (l+l^*)\,q^2$$

ein. Damit muß eine Verschiebung der Interferenzstreifen verbunden sein *Obwohl die numerischen Verhältnisse so liegen, daß noch 1°/₀ der zu er wartenden Verschiebung im Michelsonschen Interferometer wahrgenomme werden müßte, zeigte sich bei Ausführung des Experiments keine Spur davo*

Dieses seltsame Ergebnis suchte Lorentz durch die kühne Hypothes zu erklären, daß ein starrer Körper durch seine Bewegung relativ zur Äther in der Bewegungsrichtung eine Kontraktion im Verhältnis $1 : \sqrt{1-q}$ erfährt. In der Tat würde dies den negativen Ausfall des Michelsonsche Experiments erklären. Denn dann hat in der ersten Lage OA in Wah heit die Länge $l\sqrt{1-q^2}$, OA^* die Länge l^*; in der zweiten Lag aber OA die Länge l, hingegen OA^* die Länge $l^*\sqrt{1-q^2}$, und d Gangunterschied ergäbe sich in beiden Fällen $= \frac{2\,(l-l^*)}{\sqrt{1-q^2}}$. Auch e hielte man bei Drehung eines starr mit O verbundenen Spiegels in alle Richtungen die gleiche scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{c^2 -}$ und keine Abhängigkeit von der Richtung wie nach (24). Immerhin e schiene es theoretisch noch möglich, an der gegenüber c verminderte scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{c^2-v^2}$ die Bewegung konstatieren; aber wenn der Äther die Maßstäbe in der Bewegungsric tung im Verhältnis $1 : \sqrt{1-q^2}$ zusammendrückt, so braucht er den Ga der Uhren nur noch im gleichen Verhältnis zu verlangsamen, um au diesen Effekt zu zerstören. *Tatsächlich hat nicht nur der Michelsonsc sondern haben eine ganze Zahl weiterer Versuche, einen Einfluß der Er bewegung auf kombinierte mechanisch-elektromagnetische Vorgänge fest stellen, ein negatives Ergebnis gehabt*[5]. Es wäre also die Aufgabe d Äthermechanik, nicht nur die Maxwellschen Gesetze zu erklären, sonde auch diese merkwürdige Wirkung auf die Materie, die so erfolgt, als hä der Äther sich ein für allemal vorgenommen: Ihr verflixten Physik mich sollt ihr nicht kriegen!

Die einzig vernünftige Antwort aber auf die Frage: Wie kommt daß eine Translation im Äther sich nicht von Ruhe unterscheiden läß

war die, welche Einstein gab: *weil er nicht existiert!* (Der Äther ist immer eine vage Hypothese geblieben, und noch dazu eine, die sich so schlecht als möglich bewährt hat.) Dann aber liegt die Sache so: für die Mechanik hat sich das Galileische, für die Elektrodynamik das Lorentzsche Relativitätstheorem ergeben. Hat es damit wirklich seine Richtigkeit, so heben sie sich gegenseitig auf und bestimmen einen absoluten Bezugsraum, in welchem die mechanischen Gesetze die Newtonsche, die elektrodynamischen die Maxwellsche Form haben. Die Schwierigkeit, den negativen Ausfall aller Experimente zu erklären, die darauf aus sind, Translation von Ruhe zu unterscheiden, wird nur dann überwunden, wenn man für die gesamten Naturerscheinungen eines dieser beiden Relativitätsprinzipe als gültig ansieht. Das Galileische kommt für die Elektrodynamik nicht in Frage; es würde fordern, daß in der Maxwellschen Theorie die Glieder nicht auftreten, durch welche sich die zeitlich veränderlichen Felder von den stationären unterscheiden: es gäbe keine Induktion, es gäbe kein Licht und keine drahtlose Telegraphie. Hingegen läßt die Lorentzsche Kontraktionshypothese schon vermuten, die Newtonsche Mechanik lasse sich derart modifizieren, daß sie dem Lorentzschen Relativitätstheorem genügt, die dabei auftretenden Abweichungen aber nur von der Größenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ werden; dann liegen sie für alle irdischen und planetarischen Geschwindigkeiten v weit unter der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit. Das ist die Lösung Einsteins[6]), welche mit einem Schlage alle Schwierigkeiten behob: *die Welt ist ein vierdimensionaler affiner Raum, dem durch eine indefinite quadratische Form*

$$Q(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$$

von einer negativen und drei positiven Dimensionen eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Alle physikalischen Größen sind Skalare und Tensoren dieser vierdimensionalen Welt, alle Naturgesetze invariante Relationen zwischen diesen. Die einfache konkrete Bedeutung der Form $Q(\mathfrak{x})$ ist die, daß ein in dem Weltpunkt O abgeschicktes Lichtsignal in allen und nur den Weltpunkten A ankommt, für welche $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA}$ dem einen der beiden durch die Gleichung $Q(\mathfrak{x}) = 0$ definierten Kegelmäntel (vgl. § 4) angehört. Dadurch ist der »in die Zukunft geöffnete« der beiden Kegel $Q(\mathfrak{x}) \leqq 0$ vor dem in die Vergangenheit geöffneten in objektiver Weise ausgezeichnet. Wir können $Q(\mathfrak{x})$ durch Einführung eines geeigneten »*normalen*« Koordinatensystems, bestehend aus dem Nullpunkt O und den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ auf die Normalform bringen

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

(x_i die Koordinaten von A); dabei soll noch der Grundvektor $\mathfrak{e}_0$ dem in die Zukunft geöffneten Kegel angehören. *Unter diesen normalen Koordinatensystemen läßt sich in objektiver Weise keine engere Auswahl treffen*, sie sind alle gleichberechtigt. Legen wir irgend eines von ihnen zu

Grunde, so ist x_0 als die Zeit, sind $x_1\, x_2\, x_3$ als Cartesische Raumkoordina anzusprechen, und alle auf Raum und Zeit sich beziehenden geläufi Ausdrücke sind in diesem Bezugssystem wie sonst zu verwenden.

Der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches ist jetzt klar. D wenn die Wirkungsweise der Kohäsionskräfte der Materie wie die A breitung des Lichtes dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gemäß erfo so müssen die Maßstäbe so funktionieren, daß objektive Feststellun keinen Unterschied zwischen Ruhe und Translation ergeben könn Nachdem die Maxwellschen Gleichungen, wie schon Lorentz erkannte, d Einsteinschen Relativitätsprinzip genügen, ist *der Michelsonsche Vers geradezu ein Beweis dafür, daß die Mechanik der starren Körper in Stre* nicht dem Galileischen, sondern *dem Einsteinschen Relativitätspri gemäß sein muß.*

Mathematisch ist dieses ersichtlich von viel größerer Einfachheit Durchsichtigkeit als jenes[7]); die Weltgeometrie ist durch Einstein-M kowski der Euklidischen Raumgeometrie viel näher gerückt word Übrigens kommt, wie man leicht zeigen kann, die Galileische dadu als Grenzfall der Einsteinschen Weltgeometrie heraus, daß man c ge ∞ konvergieren läßt. In anschaulicher Hinsicht aber *mutet es uns den Glauben an die objektive Bedeutung der Gleichzeitigkeit abzulegen; der Befreiung von diesem Dogma liegt die große erkenntnistheoretische Einsteins*, die seinen Namen neben den des Kopernikus rückt. Die Schluß des vorigen Paragraphen gegebene graphische Darstellung z ohne weiteres, daß die Ebenen $x_0' =$ konst. nicht mehr mit den Ebe $x_0 =$ konst. zusammenfallen. Jede Ebene $x_0' =$ konst. trägt zufolge in der Welt herrschenden, auf $Q(\mathfrak{x})$ beruhenden Metrik ihrerseits solche Maßbestimmung, daß die Ellipse, in der sie den »Licht-Ke schneidet, ein Kreis ist, und in ihr gilt die Euklidische Geometrie. Durchstoßpunkt mit der x_0'-Achse ist der Mittelpunkt der Schnittelli So wird auch im gestrichenen Bezugssystem der Vorgang der Licht breitung zu einem in konzentrischen Kreisen sich vollziehenden.

Suchen wir zunächst die Schwierigkeiten zu beheben, die für un Anschauung, unser inneres Erleben von Raum und Zeit in dem von stein herbeigeführten Umsturz des Zeitbegriffs zu liegen scheinen! N der gewöhnlichen Auffassung ist es so: Schieße ich von einem Punkt aus in allen Richtungen, mit allen möglichen Geschwindigkeiten Ku ab, so erreichen sie alle Weltpunkte, die später als O sind; in die gangenheit aber kann ich nicht schießen. Ebenso ist ein in O st findendes Ereignis nur auf das, was in späteren Weltpunkten geschi von Einfluß, während an der Vergangenheit »nichts mehr gean werden kann«; die äußerste Grenze erreicht die Gravitation nach Newtonschen Attraktionsgesetz, nach dem das Ausstrecken meines Ar z. B. im selben Moment bereits seine Wirkung auf die Planetenbah beginnt, deren Verlauf ein wenig modifizierend. Unterdrücken wir wi eine Raumkoordinate und benutzen die graphische Darstellung, so

ruht also die absolute Bedeutung der durch O laufenden Ebene $t = 0$ darauf, daß sie die »*zukünftigen*« Weltpunkte scheidet, welche von O Wirkung empfangen können, und die »*vergangenen*«, von denen aus eine Wirkung nach O gelangen kann. Nach dem Einsteinschen Relativitätsprinzip tritt an die Stelle der trennenden Ebene $t = 0$ der Lichtkegel

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2t^2 = 0$$

(der im Grenzfall $c = \infty$ jene doppelt überdeckte Ebene ergeben würde). Danach ist es klar, wie die Dinge jetzt liegen: Die Richtung aller in O geschleuderten Körper muß in den vorderen, der Zukunft geöffneten Kegel hineinweisen (so auch die Richtung der Weltlinie meines eigenen Leibes, meiner »Lebenslinie«, wenn ich mich in O befinde); nur auf die Ereignisse in solchen Weltpunkten, die im Innern dieses vorderen Kegels liegen, kann das, was in O geschieht, von Einfluß sein; die Grenze wird von der durch den leeren Raum erfolgenden Ausbreitung des Lichtes gegeben*). Befinde ich mich in O, so teilt O meine Lebenslinie in Vergangenheit und Zukunft; daran ist nichts geändert. Was aber mein Verhältnis zur Welt betrifft, so liegen in dem vorderen Kegel alle diejenigen Weltpunkte, auf welche mein Tun und Lassen in O von Einfluß ist, außerhalb desselben alle die Ereignisse, die abgeschlossen hinter mir liegen, an denen »jetzt nichts mehr zu ändern ist«: *der Mantel des vorderen Kegels trennt meine aktive Zukunft von meiner aktiven Vergangenheit.* Hingegen sind im Innern des hinteren Kegels alle die Ereignisse lokalisiert, die ich entweder leibhaftig miterlebt (mitangesehen) habe, oder von denen mir irgend eine Kunde gekommen sein kann, nur diese Ereignisse haben möglicherweise Einfluß auf mich gehabt; außerhalb desselben aber liegt alles, was ich noch miterleben werde oder doch miterleben würde, wenn meine Lebensdauer unbegrenzt wäre und mein Blick überall hindringen könnte: *der Mantel des hinteren Kegels scheidet meine passive Vergangenheit von meiner passiven Zukunft.* Auf dem Mantel liegt das, was ich augenblicklich sehe oder sehen könnte; er ist also eigentlich das Bild meiner räumlichen Umwelt. Daß man in diesem Sinne zwischen *aktiver* und *passiver* Vergangenheit und Zukunft unterscheiden muß, darin liegt die erst durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip zum Ausdruck gekommene grundsätzliche Bedeutung der Römerschen

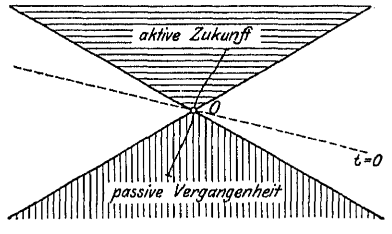


Fig. 10.

*) Auch die durch den leeren Raum erfolgende Ausbreitung der Gravitation muß natürlich nach der Einsteinschen Relativitätstheorie mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen: das Gesetz für das Gravitationspotential muß sich in analoger Weise modifizieren wie dasjenige für das elektrostatische beim Übergang von statischen zu zeitlich veränderlichen Feldern.

Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Die durch O hindurch führende Ebene $t = 0$ in einem zulässigen Bezugssystem kann irgendwi so gelegt werden, daß sie den Lichtkegel $Q(\mathfrak{x}) = 0$ nur in O schneide und somit den Kegel der aktiven Zukunft von dem Kegel der passive Vergangenheit trennt.

Zu einem Körper, der sich in gleichförmiger Translation befinde kann immer ein solches zulässiges Bezugssystem (= normales Koordinate system) eingeführt werden, in welchem er ruht. In diesem Bezugssyste besitzen dann die einzelnen Stellen des Körpers bestimmte Entfernunge ihre geradlinigen Verbindungslinien bilden gewisse Winkel miteinander usw die alle nach den Formeln der gewöhnlichen analytischen Geometrie a den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ der betr. Punkte in dem jetzt zugrunde g legten Bezugssystem zu berechnen sind. Ich will sie die *Ruhmaße* d Körpers nennen (insbesondere ist danach klar, was die Ruhlänge ein Maßstabes ist). Ist jener Körper eine Uhr, in welcher sich ein periodisch Vorgang abspielt, so kommt dieser Periode in dem Bezugssystem, welchem die Uhr ruht, eine durch den Zuwachs der Koordinate x_0 währe einer Periode bestimmte Zeitdauer zu, die »*Eigenzeit*« der Uhr. — Stoß wir den ruhenden Körper in einem und demselben Augenblick an v schiedenen Stellen an, so werden sich diese Stellen in Bewegung setze aber da die Wirkung sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreit kann, wird die Bewegung erst allmählich den ganzen übrigen Körper Mitleidenschaft ziehen. Solange die um die einzelnen Stoßpunkte Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden Kugeln sich noch nicht üb decken, bewegen sich die mitgerissenen Umgebungen der Stoßpunkte v ständig unabhängig voneinander. Daraus geht hervor, daß es starre Kör im alten Sinne gemäß der Relativitätstheorie nicht geben kann; d. h. gibt keinen Körper, der bei allen Einwirkungen, denen man ihn a setzt, objektiv immer derselbe bleibt. Wie können wir aber tr dem unsere Maßstäbe zur Raummessung verwenden? Ich gebrauche Bild. Erhitzen wir ein im Gleichgewicht befindliches, in ein Gefäß e geschlossenes Gas an verschiedenen Stellen gleichzeitig durch Stichflamn und isolieren es dann adiabatisch, so wird es zunächst eine Folge k plizierter Zustände durchlaufen, die den Gleichgewichtssätzen der Ther dynamik nicht genügen. Schließlich aber wird es zur Ruhe kommen einem neuen Gleichgewichtszustand, der seiner jetzigen, durch die wärmung erhöhten Energie entspricht. Von einem zur Messung brau baren starren Körper (insbesondere einem linealen *Maßstab*) verlan wir, daß er *immer wieder, wenn er in einem zulässigen Bezugssystem Ruhe gekommen ist*, der gleiche ist, der er vorher war, d. h. *die glei Ruhmaße* (Ruhlänge) *besitzt*; von einer richtig gehenden *Uhr*, daß *immer wieder, wenn sie in einem zulässigen Bezugssystem zur Ruhe kommen ist, dieselbe Eigenzeit hat.* Wir dürfen annehmen, daß die M stäbe und Uhren, welche wir verwenden, mit hinreichender Annäher dieser Forderung genügen. Nur wenn wir (in dem angezogenen Vergl

das Gas hinreichend langsam, streng genommen: unendlich langsam erwärmen, wird es eine Folge thermodynamischer Gleichgewichtszustände durchlaufen; nur wenn wir die Maßstäbe und Uhren nicht zu stürmisch bewegen, werden sie in jedem Augenblick ihre Ruhlänge und Eigenzeit bewahren. Freilich sind die Beschleunigungsgrenzen, innerhalb deren diese Annahme ohne merklichen Fehler gemacht werden darf, sehr weit gesteckt. Endgültiges und Exaktes darüber kann aber erst eine auf den physikalischen und mechanischen Gesetzen beruhende durchgeführte *Dynamik* ergeben.

Um die Lorentz-Kontraktion vom Standpunkt der Einsteinschen Relativitätstheorie anschaulich zu verstehen, denken wir uns folgenden ebenen Vorgang. In einem tauglichen Bezugssystem (Koordinaten t, x_1, x_2 unter Unterdrückung einer Raumkoordinate), auf das sich die im folgenden gebrauchten Raum-Zeit-Ausdrücke beziehen, ruhe ein ebenes Papierblatt (mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2), auf das eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ gezeichnet ist. Außerdem habe man eine kreisförmige Platte, die einen um den Mittelpunkt drehbaren starren Zeiger trägt; dreht man diesen langsam herum, so beschreibe die Zeigerspitze den Rand der Platte: so erweist sich, daß sie in der Tat ein Kreis ist. Die Platte bewege sich nun auf dem Papierblatt in gleichförmiger Translation; rotiert währenddes der Zeiger langsam, so wird seine Spitze beständig den Rand der Platte durchlaufen: in diesem Sinne ist sie auch in der Translation eine Kreisscheibe. In einem bestimmten Moment falle der Rand der Scheibe genau mit der Kurve $\mathfrak{C}$ zusammen. Messen wir $\mathfrak{C}$ mittels ruhender Maßstäbe aus, so finden wir, daß $\mathfrak{C}$ kein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Der Vorgang ist in der Figur graphisch dargestellt. Es ist dasjenige Bezugssystem $t'x'_1x'_2$ hinzugefügt, in welchem die Scheibe ruht. Der Schnitt einer Ebene $t' =$ konst. mit dem Lichtkegel ist in diesem Bezugssystem ein »augenblicklich vorhandener Kreis«; der über ihm in Richtung der t'-Achse errichtete Zylinder stellt einen im gestrichenen System ruhenden Kreis dar, grenzt demnach das Weltgebiet ab, das von unserer Kreisscheibe bestrichen wird. Der Schnitt dieses Zylinders mit der Ebene $t = 0$ ist in der Figur kein Kreis, sondern eine Ellipse; der über ihr in Richtung der t-Achse errichtete gerade Zylinder ist die dauernd vorhandene, auf dem Papierblatt gezeichnete Kurve.

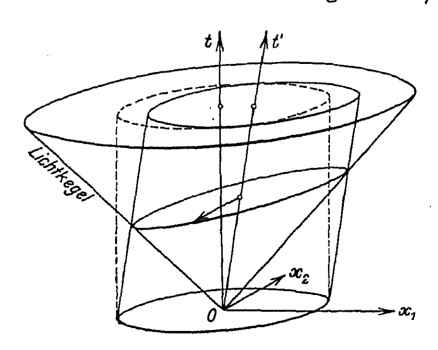


Fig. 11.

Da das Verhalten der Maßstäbe und Uhren vor Aufstellung der physikalischen Gesetze einigermaßen problematisch bleibt, ist theoretisch die Bemerkung von Interesse, daß wir zur Festlegung der Raum-Zeit-Koordi-

naten in einem zulässigen Bezugssystem prinzipiell mit viel einfachere Meßinstrumenten ausreichen, die wir von vornherein vollständig beherrsche nämlich mit Lichtsignalen und kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte selbst wenn uns für die letzteren nur ein enger Geschwindigkeitsberei zur Verfügung steht. *Die Weltpunkte bilden eine vierdimensionale Manni faltigkeit;* das ist vielleicht die sicherste Tatsache unseres gesamten Ta sachenwissens. Sind x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) irgendwelche Koordinaten z Festlegung dieser Punkte (im allgemeinen Riemannschen Sinne), so e halten wir, wenn wir diese zugleich als Cartesische Koordinaten in eine vierdimensionalen Euklidischen Raum deuten, eine stetige Abbildung d Welt auf einen derartigen Euklidischen Bildraum. Das Koordinatensyste möge ein affines heißen, wenn es die ganze Welt umkehrbar-eindeu und stetig auf einen Euklidischen Bildraum in der Weise abbildet, d die Weltlinien aller kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte im Bilde gerade Linien erscheinen. Daß es derartige Koordinatensysteme gibt, der Inhalt des Galileischen Trägheitsgesetzes. Durch die Forderung d Affinität ist aber das Koordinatensystem bis auf eine lineare Transformati bestimmt; d. h. sind in einem zweiten affinen Koordinatensystem x'_i Koordinaten desselben willkürlichen Weltpunktes, der im ersten die K ordinaten x_i besitzt, so müssen die x'_i lineare Funktionen der x_i se Denn zwei affine Koordinatensysteme liefern zwei Euklidische Abbil der Welt; diese beiden Euklidischen Räume sind somit durch Vermittlu der Welt umkehrbar-eindeutig und stetig so aufeinander abgebildet, d Gerade in Geraden übergehen. Dann gehen aber auch Ebenen in Eben über und parallele Gerade (d. h. Gerade, die in einer Ebene liegen, ab keinen Punkt gemein haben) in parallele Geraden. Daraus folgt nach ein wichtigen, zuerst von Möbius durch seine »Netzkonstruktion« bewiesen Satz der Geometrie, daß diese Abbildung eine affine im gewöhnlich Sinne ist[8]. Die Möbiussche Netzkonstruktion kann so eingerichtet werd daß die Richtungen der bei ihr benutzten Geraden einem vorgegeben beliebig schmalen Richtungskegel entnommen werden; so daß jenes g metrische Theorem bestehen bleibt, auch wenn man nur von denjenig Geraden, deren Richtungen diesem Kegel angehören, weiß, daß sie du die Abbildung wieder in Gerade übergeführt werden.

Das Galileische Trägheitsgesetz allein beweist also schon vollstän daß die Welt affin ist; mehr aber läßt sich aus ihm auch nicht ables Die metrische Grundform $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ der Welt wird jetzt wie oben durch Vorgang der Lichtausbreitung erklärt: ein in O aufgegebenes Lichtsig trifft in dem Weltpunkt A dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA}$ d einen der beiden durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ definierten Kegelmäntel angehört. I durch ist die quadratische Form bis auf einen konstanten Faktor fe gelegt; um ihn zu bestimmen, muß eine individuelle Maßeinheit willkürl gewählt werden.

§ 21. Relativistische Geometrie, Kinematik und Optik.

Einen Weltvektor $\mathfrak{x}$ nennen wir *raum- oder zeitartig*, je nachdem $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ positiv oder negativ ist. Die zeitartigen Vektoren weisen teils in die *Zukunft*, teils in die *Vergangenheit*. Wir nennen die Invariante

$$(25) \qquad \varDelta s = \sqrt{-(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}$$

für einen in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektor $\mathfrak{x}$ die *Eigenzeit* desselben; setzen wir

$$\mathfrak{x} = \varDelta s \cdot \mathfrak{e},$$

so ist $\mathfrak{e}$, die »Richtung« der zeitartigen Verschiebung $\mathfrak{x}$, ein in die Zukunft weisender Vektor, welcher der normierenden Bedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ genügt.

Wie in der Galileischen, so müssen wir auch in der Einsteinschen Weltgeometrie, um alteingewurzelte Vorstellungen und Ausdrücke über Raum und Zeit anwenden und den Zusammenhang mit der Anschauung herstellen zu können, eine *Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit* vornehmen, durch Projektion in Richtung eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektors $\mathfrak{e}$, der durch die Bedingung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ normiert sei. Der Vorgang der Projektion ist in § 18 eingehend besprochen; die aufgestellten Fundamentalformeln (3), (5), (5′) sind hier mit $e = -1$ anzuwenden*). Weltpunkte, deren Verbindungsvektor zu $\mathfrak{e}$ proportional ist, fallen in denselben Raumpunkt, den wir materiell durch einen ruhenden Massenpunkt dauernd markieren können, graphisch durch eine zu $\mathfrak{e}$ parallele Weltgerade darstellen. Der dreidimensionale Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, der durch die Projektion entsteht, trägt eine Euklidische Metrik, da für jeden zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Vektor $\mathfrak{x}^*$, d. h. jeden Vektor $\mathfrak{x}^*$, welcher der Bedingung $(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) = 0$ genügt, $(\mathfrak{x}^*\mathfrak{x}^*)$ positiv ist (außer für $\mathfrak{x}^* = 0$; vgl. § 4). Jede Verschiebung $\mathfrak{x}$ der Welt spaltet sich nach der Formel

$$\mathfrak{x} = \varDelta t \,|\, \boldsymbol{\mathfrak{x}}:$$

$\varDelta t$ ist ihre Zeitdauer (»Höhe« wurde sie in § 18 genannt), $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ die von ihr hervorgerufene Verschiebung im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$.

Bilden $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_1, \boldsymbol{\mathfrak{e}}_2, \boldsymbol{\mathfrak{e}}_3$ ein Koordinatensystem in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, so bilden die zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0$ orthogonalen Weltverschiebungen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, durch welche jene Raumverschiebungen hervorgerufen werden, zusammen mit $\mathfrak{e}_0$ ein *»zu $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ gehöriges« Koordinatensystem* für die Weltpunkte. Es ist normal, wenn die drei Vektoren $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_i$ in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ ein Cartesisches Koordinatensystem bilden; auf jeden Fall aber hat in ihm das Koeffizientensystem der metrischen Fundamentalform die Gestalt

*) Die Maßeinheiten von Raum- und Zeitlängen sind dabei so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum $= 1$ wird. Will man auf die traditionellen Einheiten des *CGS*-Systems geführt werden, so muß man die Normierung $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ ersetzen durch $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -c^2$, und es ist $e = -c^2$ zu nehmen.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Eigenzeit $\varDelta s$ eines in die Zukunft weisenden zeitartigen Vektor ($\mathfrak{x} = \varDelta s \cdot \mathfrak{e}$) ist gleich der Zeitdauer von $\mathfrak{x}$ in dem Bezugsraum $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$, welchem $\mathfrak{x}$ keine räumliche Verschiebung hervorruft. — Wir werden folgenden mehrere Zerspaltungen nach den Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$, $\cdots$ neb einander zu betrachten haben; immer soll dabei $\mathfrak{e}$ (ohne oder mit Ind einen in die Zukunft weisenden, zeitartigen, der Normierungsbeding $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = -1$ genügenden Weltvektor bezeichnen.

Sei K ein Körper, der in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$, K' ein Körper, der in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}'}$ ruhe. K' fü in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ eine gleichförmige Translation aus. Ist in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$, d. h. also bei Z spaltung nach dem Vektor $\mathfrak{e}$:

(26) $$\mathfrak{e}' = h \mid h\mathfrak{v},$$

so erfährt K' in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ während der Zeitdauer h die Raumverschiebung es ist demnach $\mathfrak{v}$ die *Geschwindigkeit* von K' in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ oder die *Rela geschwindigkeit von K' in bezug auf K.* Ihre Größe v bestimmt aus $v^2 = (\mathfrak{v}\mathfrak{v})$. Nach (3) ist

(27) $$h = -(\mathfrak{e}'\mathfrak{e});$$

anderseits gilt nach (5)

$$1 = -(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}') = h^2 - h^2(\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = h^2(1 - v^2),$$

also

(28) $$h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Erfährt K' zwischen zwei Augenblicken seiner Bewegung die Welt schiebung $\varDelta s \cdot \mathfrak{e}'$, so zeigt (26), daß $h \cdot \varDelta s = \varDelta t$ die Zeitdauer di Verschiebung in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ ist; zwischen Eigenzeit $\varDelta s$ und Zeitdauer $\varDelta t$ Verschiebung in $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ besteht demnach die Beziehung

(29) $$\varDelta s = \varDelta t \sqrt{1 - v^2}.$$

Da (27) symmetrisch in $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ ist, lehrt (28), daß die Größe *Relativgeschwindigkeit von K' in bezug auf K gleich derjenigen von K bezug auf K' ist;* die vektoriellen Relativgeschwindigkeiten selber las sich *nicht* miteinander vergleichen, da die eine im Raum $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$, die an im Raum $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}'}$ liegt.

Betrachten wir drei Zerspaltungen, nach $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$. K_1, K_2 se zwei Körper, die bzw. in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}_1}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}_2}$ ruhen. In $\mathfrak{R}_\mathfrak{e}$ sei

$$\mathfrak{e}_1 = h_1 \mid h_1 \mathfrak{v}_1, \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}};$$

$$\mathfrak{e}_2 = h_2 \mid h_2 \mathfrak{v}_2, \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}}.$$

Dann ist

$$-(\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2) = h_1 h_2 \{1 - (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2)\}.$$

Bilden also die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ von K_1 und K_2 in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, deren Größe v_1, v_2 ist, den Winkel ϑ miteinander und ist $v_{12} = v_{21}$ die Größe der Relativgeschwindigkeit von K_2 in bezug auf K_1 (oder umgekehrt), so gilt *die Formel*

$$(30) \qquad \frac{1 - v_1 v_2 \cos\vartheta}{\sqrt{1 - v_1^2}\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{12}^2}},$$

gemäß der sich die Relativgeschwindigkeit zweier Körper aus ihren Geschwindigkeiten bestimmt. Setzen wir für jede der Geschwindigkeitsgrößen $v (< 1)$ unter Benutzung des Tangens hyperbolicus:

$$v = \mathfrak{Tg}\, u,$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{Cof}\, u_1\, \mathfrak{Cof}\, u_2 - \mathfrak{Sin}\, u_1\, \mathfrak{Sin}\, u_2 \cos\vartheta = \mathfrak{Cof}\, u_{12}.$$

Diese Formel geht in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie über, wenn man die hyperbolischen durch die entsprechenden trigonometrischen Funktionen ersetzt; also ist u_{12} die dem Winkel ϑ gegenüberliegende Seite in einem Dreieck der Bolyai-Lobatschefskyschen Ebene, dessen beide anderen Seiten $= u_1, u_2$ sind.

Neben den Zusammenhang (29) zwischen Zeit und Eigenzeit stellt sich der zwischen Länge und Ruhlänge. Wir legen den Bezugsraum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ zugrunde. In einem *bestimmten* Moment mögen sich die einzelnen Massenpunkte des Körpers in den Weltpunkten O, A, ... befinden; die Raumpunkte $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$, ... von $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, in denen sie liegen, bilden eine Figur in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, der wir Dauer verleihen könnten, wenn der Körper K' in dem betrachteten Momente einen »Abdruck« im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ hinterließe, wie dies durch das am Schluß des vorigen Paragraphen besprochene anschauliche Beispiel illustriert wird. Fallen anderseits in dem Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}'}$, in welchem K' ruht, die Weltpunkte O, A, ... in die Raumpunkte $\boldsymbol{O}'$, $\boldsymbol{A}'$, ..., so bilden $\boldsymbol{O}'$, $\boldsymbol{A}'$, ... die Ruhgestalt des Körpers K' (man vergleiche die Figur, in der »orthogonale« Weltrichtungen als senkrechte gezeichnet sind). Zwischen demjenigen Teil von $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, den der Abdruck einnimmt, und der Ruhfigur des Körpers in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}'}$ besteht eine Abbildung, durch welche allgemein die Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ einander zugeordnet sind; sie ist offenbar affin (es handelt sich in der Tat um nichts anderes als um orthogonale Projektion). Da die Weltpunkte O, A *gleichzeitig* sind bei Zerspaltung nach $\mathfrak{e}$, so ist

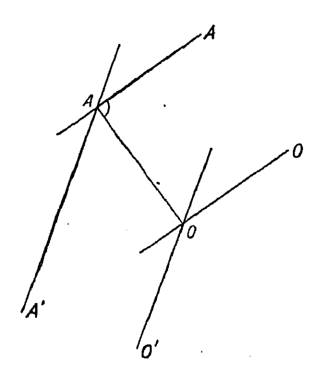


Fig. 12.

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{x} = 0 \mid \mathfrak{x} \text{ in } \boldsymbol{R}_\mathfrak{e}; \quad \mathfrak{x} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}.$$

Nach der Grundformel (5) ist

$$\overline{OA}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$
$$\overline{O'A'}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{e}')^2.$$

Bestimmen wir aber nach (5′) $(\mathfrak{x}\mathfrak{e}')$ in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, so kommt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{e}') = h(\mathfrak{x}\mathfrak{v});$$

also wird

$$\overline{O'A'}^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{v})^2}{1 - v^2}.$$

Benutzen wir in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ ein Cartesisches Koordinatensystem $x_1 x_2 x_3$ mit
als Anfangspunkt, dessen x_1-Achse in die Richtung der Geschwindigkeit
fällt, und sind $x_1 x_2 x_3$ die Koordinaten von A, so haben wir

$$\overline{OA}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$\overline{O'A'}^2 = \frac{x_1^2}{1 - v^2} + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

wenn man

(31) $$x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_3' = x_3$$

setzt. Indem man in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ jedem Punkt mit den Koordinaten $(x_1, x_2,$
den Punkt mit den aus (31) sich ergebenden Koordinaten $(x_1', x_2',$
zuordnet, führt man eine Dilatation des Abdrucks in Richtung der Körp
bewegung im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2}$ durch. Unsere Formeln besag
daß dadurch der Abdruck in eine zur Ruhegestalt des Körpers k
gruente Figur übergeht: das ist die *Lorentz-Kontraktion*. Insbesondere
steht zwischen dem Volumen V, das der Körper K' in einem bestimm
Augenblick im Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ einnimmt, und seinem Ruhvolumen V_0 die
ziehung

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2}.$$

Alle optischen Winkelmessungen durch Anvisieren stellen die Wi
zwischen Lichtstrahlen in demjenigen Bezugsraum fest, in welchem
(aus starrem Material gebaute) Meßinstrument ruht. *Diese Winkel
es auch, wenn wir das Meßinstrument durch das Auge ersetzen, w
maßgebend sind für die von einem Beobachter anschaulich erfaßte Ge
der in seinem Gesichtsfeld befindlichen Gegenstände.* Um den Zusamm
hang zwischen Geometrie und Beobachtung geometrischer Größen h
stellen, müssen wir daher noch auf optische Verhältnisse eingehen.

Die einem Lichtstrahl entsprechenden Lösungen der Maxwells
Gleichungen haben sowohl im Äther wie in einem homogenen Med
das in einem zulässigen Bezugsraum ruht, diese Form, daß die Kon
nenten der Zustandsgrößen (bei komplexer Schreibweise) alle

$$= \text{konst. } e^{2\pi i \Theta(P)}$$

sind, wo $\Theta = \Theta(P)$, die durch diesen Ansatz nur bis auf eine ad
Konstante bestimmte »Phase«, eine Funktion des als Argument auftrete

Weltpunktes ist. Nach Ausführung irgend einer linearen Transformation der Weltkoordinaten werden die Komponenten im neuen Koordinatensystem abermals die gleiche Gestalt besitzen, mit derselben Phasenfunktion Θ. Die Phase ist demnach eine Invariante. Für eine ebene Welle ist sie eine *lineare* und, wenn wir absorbierende Medien ausschließen, reelle Funktion der Weltkoordinaten von P und die Phasendifferenz in zwei beliebigen Punkten $\Theta(B) - \Theta(A)$ mithin eine Linearform der willkürlichen Verschiebung $\mathfrak{x} = \overrightarrow{AB}$, also ein kovarianter Weltvektor. Stellen wir diesen durch die korrespondierende Verschiebung $\mathfrak{l}$ dar (wir sprechen kurz von dem »Lichtstrahl $\mathfrak{l}$«), so ist also

$$\Theta(B) - \Theta(A) = (\mathfrak{l}\mathfrak{x})\,.$$

Spalten wir nach einem zeitartigen Vektor $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit und setzen

$$(32) \qquad \mathfrak{l} = \nu \mid \frac{\nu}{q}\mathfrak{a}$$

in solcher Weise, daß der Raumvektor $\mathfrak{a}$ in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ die Länge 1 besitzt,

$$\mathfrak{x} = \Delta t \mid \mathfrak{x}\,,$$

so ist die Phasendifferenz

$$= \nu \left\{\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{x})}{q} - \Delta t\right\}.$$

Daraus geht hervor, daß ν die Frequenz bedeutet, q die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und $\mathfrak{a}$ die Richtung des Lichtstrahls im Raume $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$. Im Äther ist, wie sich noch aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $q = 1$ oder

$$(\mathfrak{l}\mathfrak{l}) = 0\,.$$

Spalten wir die Welt auf zweierlei Art, einmal nach $\mathfrak{e}$, ein andermal nach $\mathfrak{e}'$, in Raum und Zeit und unterscheiden die auf die eine und andere Spaltung bezüglichen Größen durch den Akzent, so ergibt sich nun sofort aus der Invarianz von $(\mathfrak{l}\mathfrak{l})$ das Gesetz

$$(33) \qquad \nu^2\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) = \nu'^2\left(\frac{1}{q'^2} - 1\right).$$

Fassen wir zwei Lichtstrahlen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ mit den Frequenzen ν_1, ν_2 ins Auge, so ist

$$(\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2) = \nu_1\nu_2\left\{\frac{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)}{q^2} - 1\right\}.$$

Bilden jene also den Winkel ω miteinander, so gilt

$$(34) \qquad \nu_1\nu_2\left\{\frac{\cos\omega}{q^2} - 1\right\} = \nu_1'\nu_2'\left\{\frac{\cos\omega'}{q'^2} - 1\right\}.$$

Für den Äther lauten diese Gleichungen

$$(35) \qquad q = q'(=1)\,, \qquad \nu_1\nu_2\sin^2\frac{\omega}{2} = \nu_1'\nu_2'\sin^2\frac{\omega'}{2}\,.$$

Um endlich den Zusammenhang zwischen den Frequenzen ν und ν
zugeben, nehmen wir einen Körper an, der in $\mathfrak{R}_{e'}$ ruht; er hab
Raum $\mathfrak{R}_e$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so daß wie früher

(26) $$\mathfrak{e}' = h \mid h\mathfrak{v} \text{ in } \mathfrak{R}_e$$

zu setzen ist. Aus (26) und (32) folgt

$$\nu' = -(\mathfrak{l}\mathfrak{e}') = \nu h \left\{ 1 - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{v})}{q} \right\}.$$

Bildet demnach die Richtung des Lichtstrahls in $\mathfrak{R}_e$ mit der Gesc
digkeit des Körpers den Winkel ϑ, so ist

(36) $$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \frac{v \cos \vartheta}{q}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

(36) ist das *Dopplersche Prinzip*. Da beispielsweise ein Nat
molekül, in einem zulässigen Bezugsraum ruhend, immer objektiv
selbe sein wird, so besteht dieser Zusammenhang zwischen der in
ruhenden Spektroskop beobachteten Frequenz ν' eines ruhenden
eines mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Natriummoleküls;
der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Moleküls mit d
das Spektroskop eintretenden Lichtstrahl bildet. — Setzen wir (36) i
ein, so bekommen wir eine Gleichung zwischen q und q': sie ge
aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit q' des Lichtes in einem ruh
Medium, z. B. in Wasser, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q im be
zu berechnen; v ist jetzt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers,
Winkel, den die Strömungsrichtung des Wassers mit dem Lichtstra
schließt. Lassen wir insbesondere diese beiden Richtungen zusa
fallen und vernachlässigen höhere Potenzen von v (das ja in prak
Fällen sehr klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit), so bekomm

$$q = q' + v(1 - q'^2):$$

nicht mit ihrem vollen Betrage v, sondern nur mit dem Bruchteil 1
desselben $\left(n = \frac{1}{q'} \text{ der Brechungsindex des Mediums}\right)$ addiert si
Geschwindigkeit des Mediums zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit.
»*Mitführungskoeffizient*« $1 - \frac{1}{n^2}$ war bereits lange vor der Relat
theorie von Fizeau experimentell dadurch festgestellt worden, daß
der gleichen Lichtquelle entstammende Strahlen, deren einer durch
des, deren anderer durch fließendes Wasser läuft, zur Interferenz b
Daß die Relativitätstheorie dieses merkwürdige Resultat erklärt,
daß sie für die Optik und Elektrodynamik bewegter Medien Geltu
(und daß in solchen nicht etwa, wie man nach der in ihnen g
Wellengleichung vielleicht vermuten könnte, ein Relativitätsprinz
das aus dem Lorentz-Einsteinschen hervorgeht, wenn man c durc

setzt). Die Formel (34) endlich wollen wir für den Äther $q = q' = 1$ spezialisieren — vgl. (35):

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(1 - v \cos \vartheta_1)(1 - v \cos \vartheta_2)}{1 - v^2} \sin^2 \frac{\omega'}{2}.$$

Ist der Bezugsraum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ derjenige, auf welchen sich die Planetentheorie bezieht (und in dem der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht), der Körper die Erde (auf der sich das Beobachtungsinstrument befindet), v ihre Geschwindigkeit in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, ω der Winkel in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, den die zum Sonnensystem gelangenden Strahlen zweier unendlichentfernter Sterne miteinander bilden, ϑ_1, ϑ_2 die Winkel, welche diese Strahlen mit der Bewegungsrichtung der Erde in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ einschließen, so bestimmt sich der Winkel ω', unter dem die Sterne von der Erde aus beobachtet werden, durch diese Gleichung. ω können wir freilich nicht messen, aber wir beobachten die mit den Änderungen von ϑ_1 und ϑ_2 im Laufe des Jahres verbundenen Änderungen von ω' (*Aberration*).

Die Formeln für den Zusammenhang zwischen Zeit und Eigenzeit, Volumen und Ruhvolumen gelten auch für *ungleichförmige Bewegung*. Ist $d\mathfrak{x}$ die unendlichkleine Verschiebung, welche ein sich bewegender Massenpunkt in einem unendlichkleinen Zeitraum in der Welt erfährt, so wird durch

$$d\mathfrak{x} = ds \cdot \mathfrak{u}, \quad (\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = -1, \quad ds > 0$$

Eigenzeit ds und Weltrichtung $\mathfrak{u}$ dieser Verschiebung erklärt. Das über irgend ein Stück der Weltlinie erstreckte Integral

$$\int ds = \int \sqrt{-(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})}$$

ist die während dieses Teiles der Bewegung verfließende »Eigenzeit«; sie ist unabhängig von jeder willkürlichen Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit und wird bei nicht zu stürmischer Beschleunigung durch eine mit dem Massenpunkt verbundene Uhr angegeben werden. Benutzen wir irgendwelche affine Koordinaten x_i in der Welt und die Eigenzeit s als Parameter zur analytischen Darstellung der Weltlinie (so wie wir in der dreidimensionalen Geometrie die Bogenlänge gebrauchen), so sind

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

die (kontravarianten) Komponenten von $\mathfrak{u}$, und es ist $\sum_i u_i u^i = -1$.

Zerspalten wir die Welt nach $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit, so gilt

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \;\Big|\; \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \text{ in } \boldsymbol{R}_\mathfrak{e},$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist, und zwischen der während der Verschiebung $d\mathfrak{x}$ verfließenden Zeit dt in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ und der Eigenzeit ds besteht der Zusammenhang

$$ds = dt \sqrt{1 - v^2}. \tag{37}$$

Liegen zwei Weltpunkte A, B so zueinander, daß $\overrightarrow{AB}$ ein in die Zuku
gerichteter zeitartiger Vektor ist, so kann A mit B durch Weltlinien v
bunden werden, deren Richtung überall gleichfalls dieser Bedingung
nügt; es können also in A abgehende Massenpunkte nach B gelang
Die von ihnen dazu benötigte Eigenzeit ist abhängig von der Weltlin
sie ist am längsten für einen Massenpunkt, der in gleichförmiger Tra
lation von A nach B fliegt. Denn zerspalten wir so in Raum und Z
daß A und B in den gleichen Raumpunkt fallen, so ist diese Beweg
die Ruhe, und die Behauptung geht aus der Formel (37) hervor, wel
lehrt, daß die Eigenzeit s hinter der Zeit t zurückbleibt. — Der Lebe
prozeß eines Menschen kann sehr wohl mit einer Uhr verglichen werd
Von zwei Zwillingsbrüdern, die sich in einem Weltpunkt A trennen, ble
der eine in der Heimat (d. h. ruhe dauernd in einem tauglichen Bezu
raum), der andere aber unternehme Reisen, bei denen er Geschwind
keiten (relativ zur »Heimat«) entwickelt, die der Lichtgeschwindigk
nahekommen; dann wird sich der Reisende, wenn er dereinst in
Heimat zurückkehrt, als merklich jünger herausstellen denn der Seßha

Ein Massenelement dm (eines kontinuierlich ausgedehnten Körpe
das sich mit einer Geschwindigkeit von der Größe v bewegt, nimmt
einem bestimmten Moment ein Volumen dV ein, das mit seinem R
volumen dV_0 durch die Formel zusammenhängt:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2},$$

Für Dichte $\frac{dm}{dV} = \mu$ und Ruhdichte $\frac{dm}{dV_0} = \mu_0$ gilt demnach die Gleich

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - v^2}.$$

μ_0 ist eine Invariante, $\mu_0 \mathfrak{u}$ mit den Komponenten $\mu_0 u^i$ also ein d
die Bewegung der Masse unabhängig vom Koordinatensystem bestim
kontravarianter Vektor, der »materielle Strom«. Er genügt der K
tinuitätsgleichung

$$\sum_i \frac{\partial(\mu_0 u^i)}{\partial x_i} = 0.$$

Dieselben Bemerkungen finden Anwendung auf die Elektrizität: hafte
an der Materie und ist de die elektrische Ladung des Masseneleme
dm, so besteht zwischen Ruhdichte $\varrho_0 = \frac{de}{dV_0}$ und Dichte $\varrho = \frac{de}{dV}$
Zusammenhang

$$\varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - v^2},$$

und

$$s^i = \varrho_0 u^i$$

sind die kontravarianten Komponenten des »elektrischen (Vierer-) Stro
das entspricht genau dem Ansatz in § 19. In der phänomenologis
Maxwellschen Theorie der Elektrizität wird die verborgene Bewegung

Elektronen als Bewegung der Materie nicht mitberücksichtigt, folglich haftet dort die Elektrizität nicht an der Materie. Die einem Stück Materie zukommende Ladung kann dann nicht anders erklärt werden als: diejenige Ladung, welche sich gleichzeitig in demselben Raumstück befindet, das in dem betr. Moment von der Materie eingenommen wird; daraus geht hervor, daß sie nicht wie in der Elektronentheorie eine durch das Materiestück bestimmte Invariante ist, sondern abhängig von der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit.

§ 22. Elektrodynamik bewegter Körper.

Mit der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit ist eine Zerspaltung aller Tensoren verbunden; wie diese geschieht, wollen wir zunächst rein mathematisch betrachten, um sie dann auf die Herleitung der elektrodynamischen Grundgleichungen für bewegte Körper anzuwenden. Es handle sich um einen n-dimensionalen metrischen Raum, den wir als »Welt« bezeichnen, mit der metrischen Grundform $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$. Sei $\mathfrak{e}$ ein Vektor in ihm, für welchen $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = e \neq 0$ ist: nach ihm spalten wir in bekannter Weise die Welt in Zeit und Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ möge irgend ein Koordinatensystem im Raum $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ sein und $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ diejenigen zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0$ orthogonalen Verschiebungen der Welt, welche $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ hervorrufen. In dem »zu $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ gehörigen« Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ für die Welt hat das Schema der kovarianten Komponenten des metrischen Fundamentaltensors die Gestalt

$$\left|\begin{matrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{matrix}\right| \qquad (n = 3).$$

Wir fassen als Beispiel einen Tensor 2. Stufe (im weiteren Sinne) ins Auge, der in diesem Koordinatensystem die Komponenten T_{ik} besitze. Er spaltet, wie wir behaupten, in einer durch $\mathfrak{e}$ allein bestimmten Weise nach dem folgenden Schema

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline T_{00} & T_{01} & T_{02} \\ \hline T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} \\ \hline \end{array}$$

in einen Skalar, zwei Vektoren und einen Tensor 2. Stufe in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$, die hier durch ihre Komponenten im Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ charakterisiert sind.

Spaltet nämlich die beliebige Weltverschiebung $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{e}$ wie folgt:

$$\mathfrak{x} = \xi \mid \mathfrak{x},$$

und gilt bei Zerlegung in einen zu $\mathfrak{e}$ proportionalen und einen zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Summanden

$$\mathfrak{x} = \xi \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*,$$

so ist, wenn $\mathfrak{x}$ die Komponenten ξ^i hat:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^i \mathfrak{e}_i\,, \qquad \xi = \xi^0, \qquad \mathfrak{x}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \mathfrak{e}_i\,, \qquad \boldsymbol{\mathfrak{x}} = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \boldsymbol{\mathfrak{e}}_i\,.$$

Ohne Benutzung eines Koordinatensystems läßt sich daher die Zerlegun des Tensors so darstellen. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei willkürliche Verschiebung der Welt und setzen wir

$$(38) \qquad \mathfrak{x} = \xi \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^*, \qquad \mathfrak{y} = \eta \mathfrak{e} + \mathfrak{y}^*,$$

so daß $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{y}^*$ orthogonal zu $\mathfrak{e}$ sind, so ist die zum Tensor 2. St gehörige Bilinearform

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \xi\eta\, T(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) + \eta\, T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e}) + \xi\, T(\mathfrak{e}\mathfrak{y}^*) + T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*)\,.$$

Wir bekommen also, wenn wir für zwei beliebige Verschiebungen Raumes $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{y}}$ unter $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{y}^*$ die zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen Verschiebungen der V verstehen, welche sie hervorrufen,

1) einen Skalar $T(\mathfrak{e}\mathfrak{e}) = J = \boldsymbol{J}$,

2) zwei Linearformen (Vektoren) im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, definiert durch

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{e})\,, \qquad \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = T(\mathfrak{e}\mathfrak{x}^*)\,,$$

3) eine Bilinearform (Tensor) im Raum $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$, definiert durch

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{y}}) = T(\mathfrak{x}^*\mathfrak{y}^*)\,.$$

Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ beliebige Weltverschiebungen, welche $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$, bzw. $\boldsymbol{\mathfrak{y}}$ in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ he rufen, so muß man in diesen Definitionen $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{y}^*$ nach (38) durch $\mathfrak{x}$ - $\mathfrak{y} - \eta\mathfrak{e}$ ersetzen, wo

$$\xi = \frac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,, \qquad \eta = \frac{1}{e}(\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,.$$

Setzen wir noch

$$T(\mathfrak{x}\mathfrak{e}) = L(\mathfrak{x})\,, \qquad T(\mathfrak{e}\mathfrak{x}) = L'(\mathfrak{x})\,,$$

so erhalten wir dann

$$(39) \quad \begin{cases} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = L(\mathfrak{x}) - \dfrac{J}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,, \qquad \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{\mathfrak{x}}) = L'(\mathfrak{x}) - \dfrac{J}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,; \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\mathfrak{x}}\boldsymbol{\mathfrak{y}}) = T(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) - \dfrac{1}{e}(\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,L(\mathfrak{x}) - \dfrac{1}{e}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})\,L'(\mathfrak{y}) + \dfrac{J}{e^2}(\mathfrak{x}\mathfrak{e})(\mathfrak{y} \end{cases}$$

Die auf der linken Seite stehenden Linear- und Bilinearformen (V und Tensoren) in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ können durch die auf der rechten Seite ste aus ihnen eindeutig sich bestimmenden Vektoren und Tensoren c repräsentiert werden. In der obigen Komponentendarstellung kor darauf hinaus, daß z. B.

$$\boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \text{ repräsentiert wird durch } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & T_{1} \\ 0 & T_{21} & T_{2} \end{vmatrix}$$

Man sieht sofort ein, daß in allen Rechnungen die Tensoren des durch die repräsentierenden Welttensoren ersetzt werden könne

werden wir hier nur davon Gebrauch machen, daß, wenn ein Raumtensor das λfache eines andern ist, das gleiche für die repräsentierenden Welttensoren gilt.

Legen wir dem Rechnen mit Komponenten ein *beliebiges* Koordinatensystem zugrunde, in welchem

$$\mathfrak{e} = (e^0, e^1, \ldots, e^{n-1}),$$

so ist die Invariante

$$J = T_{ik} e^i e^k \text{ und } e = e^i e_i.$$

Die beiden Vektoren und der Tensor in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ aber haben gemäß (39) zu Repräsentanten in der Welt die beiden Vektoren und den Tensor mit den Komponenten

$$\boldsymbol{L}\colon\ L_i - \frac{J}{e} e_i, \qquad L_i = T_{ik} e^k,$$

$$\boldsymbol{L}'\colon\ L'_i - \frac{J}{e} e_i, \qquad L'_i = T_{ki} e^k;$$

$$\boldsymbol{T}\colon\ T_{ik} - \frac{e_k L_i + e_i L'_k}{e} + \frac{J}{e^2} e_i e_k.$$

Im Falle eines schiefsymmetrischen Tensors (Flächentensors 1. Stufe) wird $J = 0$ und $\boldsymbol{L}' = -\boldsymbol{L}$; unsere Formeln reduzieren sich auf

$$\boldsymbol{L}\colon\ L_i = T_{ik} e^k$$

$$\boldsymbol{T}\colon\ T_{ik} + \frac{e_i L_k - e_k L_i}{e}.$$

Ein Flächentensor 1. Stufe spaltet im Raum in einen Vektor und einen Flächentensor 1. Stufe. —

Die Maxwellschen Feldgleichungen für ruhende Körper sind in § 19 zusammengestellt worden. Von H. Hertz rührt der erste Versuch her, sie in allgemein gültiger Weise auf bewegte Körper auszudehnen. Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet: Die zeitliche Abnahme des von einem Leiter umschlossenen Induktionsflusses ist gleich der induzierten elektromotorischen Kraft:

$$(40) \qquad -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int B_n do = \int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{r}.$$

Dabei muß, wenn sich der Leiter bewegt, das Flächenintegral links erstreckt werden über eine in den Leiter eingespannte Fläche, die sich irgendwie mit dem Leiter mitbewegt. Da das Faradaysche Induktionsgesetz experimentell gerade an solchen Fällen geprüft wird, wo die zeitliche Änderung des vom Leiter umschlossenen Induktionsflusses durch die Bewegung des Leiters bewirkt wird, war Hertz nicht im Zweifel darüber, daß auch im Falle eines bewegten Leiters dieses Gesetz zu postulieren ist. Die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ bleibt bestehen; die Vektoranalysis lehrt, daß man, sie berücksichtigend, das Induktionsgesetz (40) in die differentielle Formel

$$(41) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$$

kleiden kann, in der $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ den nach der Zeit an einer festen Raumstell genommenen Differentialquotienten bedeutet und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigke der Materie.

Gleichung (41) hat merkwürdige Konsequenzen. Denken wir u (Wilsonscher Versuch) zwischen zwei Kondensatorplatten ein homogen Dielektrikum, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von d Größe v zwischen ihnen bewegt; die beiden Kondensatorplatten sei leitend verbunden, und es herrsche ein homogenes Magnetfeld H parall den Platten, senkrecht zu $\mathfrak{v}$. Aus (41) folgt dann, daß in dem Rau zwischen den Platten $\mathfrak{E} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ sich aus einem Potential ableitet; dieses an den leitend verbundenen Platten $= 0$ se muß, folgt leicht

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}].$$

Es entsteht also senkrecht zu den Platten ein hom genes elektrisches Feld von der Stärke

$$E = \frac{\mu}{c} v H \qquad (\mu = \text{Permeabilität}).$$

Folglich muß auf den Platten eine statische Ladu mit der Oberflächendichte

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} v H \quad (\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante}$$

Fig. 13.

auftreten. Ist das Dielektrikum ein Gas, so müßte dieser Effekt au bei beliebiger Verdünnung sich zeigen, da bei unendlicher Verdünnu $\varepsilon\mu$ nicht gegen 0, sondern gegen 1 konvergiert. Dies hat nur ein Sinn, wenn man an den Äther glaubt; dann heißt das, daß der Eff auftritt, wenn der Äther zwischen den Platten sich relativ zu ihnen u dem außerhalb der Platten ruhenden Äther bewegt. Zur Erklärung Induktion aber müßte man annehmen, daß der Äther bei der Bewegu des Leitungsdrahtes von diesem mitgerissen wird. Die Beobachtung, Fizeausche Versuch der Lichtfortpflanzung im strömenden Wasser u der Wilsonsche Versuch selber[9]) zeigen aber die Unrichtigkeit dieser A nahme; wie bei Fizeaus Versuch der Mitführungskoeffizient $1 - \frac{1}{n^2}$ a tritt, so ist bei der gegenwärtigen Anordnung nur eine Aufladung v der Größe

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{c} v H$$

beobachtet worden, welche verschwindet, wenn $\varepsilon\mu = 1$ wird. Das sche in unlösbarem Widerspruch zur Tatsache der Induktion des beweg Leiters zu stehen.

Die Relativitätstheorie bringt hier die volle Aufklärung. Setzen wir wieder, wie in § 19, $ct = x_0$ und fassen, wie dort 𝔈 und 𝔅 zum Felde F, so auch 𝔇 und 𝔥 zu einem Flächentensor 1. Stufe H zusammen, so lauten die Feldgleichungen

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0, \\ \sum\limits_k \dfrac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \end{cases}$$

Sie gelten, wenn wir die F_{ik} als die kovarianten, H^{ik} als die kontravarianten Komponenten je eines Flächentensors 1. Stufe auffassen, die s^i aber als kontravariante Komponenten eines Vektors in der vierdimensionalen Welt, wegen ihres invarianten Charakters in einem beliebigen affinen Koordinatensystem. Die Materialgesetze

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E}$$

aber besagen: spalten wir die Welt derart in Raum und Zeit, daß die Materie ruht, und spaltet dabei F in $\mathfrak{E} \mid \mathfrak{B}$, H in $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{H}$ und s in $\varrho \mid \mathfrak{s}$, so gelten jene Beziehungen. Benutzen wir nunmehr ein beliebiges Koordinatensystem und hat in ihm die Weltrichtung der Materie die Komponenten u^i, so formulieren sich diese Tatsachen nach unsern obigen Ausführungen so:

$$(43)\qquad H_i^* = \varepsilon F_i^*,$$

wo

$$F_i^* = F_{ik} u^k, \qquad H_i^* = H_{ik} u^k$$

ist;

$$(44)\qquad F_{ik} - (u_i F_k^* - u_k F_i^*) = \mu\{H_{ik} - (u_i H_k^* - u_k H_i^*)\}$$

und

$$(45)\qquad s_i - u_i(s_k u^k) = \sigma F_i^*.$$

Das ist die invariante Form jener Gesetze. Für die Durchrechnung ist es noch bequem, (44) durch die unmittelbar daraus sich ergebenden Gleichungen

$$46)\qquad F_{kl} u_i + F_{li} u_k + F_{ik} u_l = \mu\{H_{kl} u_i + H_{li} u_k + H_{ik} u_l\}$$

zu ersetzen. Sie gelten ihrer Herleitung nach nur für Materie, die in gleichförmiger Translation begriffen ist; wir dürfen sie aber auch als gültig betrachten für beliebig bewegte Materie, wenn deren Geschwindigkeit zeitlich und örtlich nicht zu rasch veränderlich ist.

Nachdem wir so die invariante Gestalt gewonnen haben, können wir jetzt nach einem beliebigen $\mathfrak{e}$ spalten; in $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ mögen die Meßinstrumente, die zur Messung der ponderomotorischen Wirkungen des Feldes benutzt werden, ruhen. Wir verwenden ein zu $\boldsymbol{R}_\mathfrak{e}$ gehöriges Koordinatensystem und setzen also

$$(F_{10},\ F_{20},\ F_{30}) = (\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3) = \mathfrak{E}$$
$$(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}) = (\boldsymbol{B}_{23},\ \boldsymbol{B}_{31},\ \boldsymbol{B}_{12}) = \mathfrak{B}$$

$$(H_{10},\ H_{20},\ H_{30}) = (\boldsymbol{D}_1,\ \boldsymbol{D}_2,\ \boldsymbol{D}_3) = \mathfrak{D}$$
$$(H_{23},\ H_{31},\ H_{12}) = (\boldsymbol{H}_{23},\ \boldsymbol{H}_{31},\ \boldsymbol{H}_{12}) = \mathfrak{H}$$

$$s^0 = \varrho; \qquad (s^1,\ s^2,\ s^3) = (\boldsymbol{s}^1,\ \boldsymbol{s}^2,\ \boldsymbol{s}^3) = \mathfrak{s}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}; \qquad (u^1,\ u^2,\ u^3) = \frac{(\boldsymbol{v}^1,\ \boldsymbol{v}^2,\ \boldsymbol{v}^3)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}},$$

dann ergeben sich zunächst wiederum *die Maxwellschen Feldgleichu die somit nicht nur für ruhende, sondern auch für bewegte Mater unveränderter Form gültig sind.* Verstößt aber das nicht aufs kras gegen die Induktionsbeobachtungen, die doch ein Zusatzglied wie in zu fordern scheinen? Nein; denn durch diese Beobachtungen wi Wahrheit nicht die Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestimmt, sondern der im Leiter flie Strom; der Zusammenhang zwischen beiden ist aber für bewegte K ein anderer, nämlich durch die Gleichung (45) gegeben.

Schreiben wir von den Gleichungen (43), (45) die den Indizes $i =$ entsprechenden Komponenten hin, von (46) die, welche

$$(ikl) = (2\,3\,0),\ (3\,1\,0),\ (1\,2\,0)$$

korrespondieren (die andern sind überschüssig), so ergibt sich, wie ohne weiteres übersieht, folgendes. Wird

$$\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{B}] = \mathfrak{E}^*, \qquad \mathfrak{D} + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = \mathfrak{D}^*,$$
$$\mathfrak{B} - [\mathfrak{v}\mathfrak{E}] = \mathfrak{B}^*, \qquad \mathfrak{H} - [\mathfrak{v}\mathfrak{D}] = \mathfrak{H}^*$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{D}^* = \varepsilon\,\mathfrak{E}^*, \qquad \mathfrak{B}^* = \mu\,\mathfrak{H}^*.$$

Zerlegen wir außerdem $\mathfrak{s}$ in den »Konvektionsstrom« $\mathfrak{c}$ und »Lei strom« $\mathfrak{s}^*$:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{c} + \mathfrak{s}^*;$$

$$\mathfrak{c} = \varrho^*\mathfrak{v}, \qquad \varrho^* = \frac{\varrho - (\mathfrak{v}\mathfrak{s})}{1 - v^2},$$

so ist ferner

$$\mathfrak{s}^* = \frac{\sigma\,\mathfrak{E}^*}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Jetzt klärt sich alles auf: der Strom ist teils Konvektionsstrom, rü von der Bewegung der geladenen Materie, teils Leitungsstrom, be durch die Leitfähigkeit σ der Substanz. Der Leitungsstrom be sich aus dem Ohmschen Gesetz, wenn die elektromotorische Kraf durch das Linienintegral von $\mathfrak{E}$, sondern von $\mathfrak{E}^*$ definiert wird $\mathfrak{E}^*$ aber gilt genau die zu (41) analoge Gleichung

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E}^* = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

(c ist jetzt durchgängig $= 1$ genommen) oder, integral geschrieben wie (40),

$$-\frac{d}{dt}\int B_n do = \int \mathfrak{E}^* d\mathfrak{r}.$$

Damit ist die Faradaysche Induktion in bewegten Leitern vollkommen erklärt. Was den Wilsonschen Versuch betrifft, so gilt nach der jetzigen Theorie rot $\mathfrak{E} = 0$, und es wird demnach $\mathfrak{E} = 0$ sein zwischen den Platten. Daraus ergibt sich aber für die konstanten Beträge der einzelnen Vektoren (von denen die elektrischen senkrecht zu den Platten, die magnetischen parallel den Platten senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet sind):

$$E^* = vB^* = v\mu H^* = \mu v(H + vD)$$
$$D = D^* - vH = \varepsilon E^* - vH.$$

Setzen wir den Ausdruck von E^* aus der ersten Gleichung ein, so kommt

$$D = v\{(\varepsilon\mu - 1)H + \varepsilon\mu v D\},$$

$$D = \frac{\varepsilon\mu - 1}{1 - \varepsilon\mu v^2} vH.$$

Das ist der Wert der flächenhaften Ladungsdichte, die sich auf den Kondensatorplatten herstellt; er stimmt mit den Beobachtungen überein, da wegen der Kleinheit von v der Nenner in unserer Formel außerordentlich wenig von 1 verschieden ist.

Die Grenzbedingungen an der Grenze der Materie gegen den Äther ergeben sich daraus, daß die Feldgrößen F und H keine sprunghafte Änderung erleiden werden, wenn man mit der Materie mitgeht; wohl aber werden sie im allgemeinen an einer festen, zunächst im Äther gelegenen Raumstelle einen Sprung in dem Momente erleiden, wo sich die Materie über diesen Punkt hinüberschiebt. Ist s die Eigenzeit eines Materieelements, so muß also

$$\frac{dF_{ik}}{ds} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} u^l$$

überall endlich bleiben. Setzen wir

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = -\left(\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}\right),$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck

$$= \frac{\partial F_k^*}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i^*}{\partial x_k}$$

ist. $\mathfrak{E}^*$ kann folglich keine Flächenwirbel besitzen (und $\mathfrak{B}$ keine Flächendivergenz).

Die Grundgleichungen für bewegte Körper sind in der hier gegebenen Form im wesentlichen schon von Lorentz vor der Entdeckung des Relativitätsprinzips aus der Elektronentheorie hergeleitet worden. Das ist aber kein Wunder, da ja die Maxwellschen Grundgesetze für den Äther dem Relativitätsprinzip genügen und die Elektronentheorie durch Mittelwertbildung aus

diesen Gesetzen die für die Materie gültigen herleitet. Der Fizeausche, der Wilsonsche und noch ein analoger, der Röntgen-Eichenwaldsche Versuch [10]) beweisen, daß für das elektromagnetische Verhalten der Materie das Relativitätsprinzip Geltung besitzt; die Probleme der Elektrodynamik für bewegte Körper waren es, die Einstein zu seiner Aufstellung führten. Minkowski verdanken wir die klare Einsicht, daß die Grundgleichungen für bewegte Körper durch das Relativitätsprinzip eindeutig festgelegt sind, wenn man die Maxwellsche Theorie für ruhende Materie zugibt; von ihr rührt die endgültige Formulierung her [11]).

Es handelt sich jetzt endlich darum, *die Mechanik*, die in ihre klassischen Form dem Prinzip nicht Genüge leistet, ihm zu unterwerfe und zu untersuchen, ob sich die dazu nötigen Modifikationen in Einklan mit der Erfahrung befinden.

§ 23. Mechanik des Relativitätsprinzips.

Als maßgebend für die ponderomotorische Wirkung des elektromagne schen Feldes haben wir in der Elektronentheorie einen Vektor $\mathfrak{p}$ gefund dessen kontravariante Komponenten

$$p^i = F^{ik} s_k = \varrho_0 F^{ik} u_k$$

sind. Er erfüllt also die Gleichung

$$p^i u_i = (\mathfrak{p}\mathfrak{u}) = 0; \tag{47}$$

$\mathfrak{u}$ ist die Weltrichtung der Materie. Spalten wir irgendwie in Ra und Zeit

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{u} &= h \mid h\mathfrak{v} \\ \mathfrak{p} &= \lambda \mid \mathfrak{p}, \end{aligned} \right. \tag{48}$$

so ist $\mathfrak{p}$ die Kraftdichte und, wie aus (47) oder

$$h\{\lambda - (\mathfrak{p}\mathfrak{v})\} = 0$$

hervorgeht, λ die Leistungsdichte.

Das Grundgesetz der dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gem Mechanik erhalten wir durch die gleiche Methode wie im vorigen graphen die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Kö wir nehmen an, daß das Newtonsche Gesetz in demjenigen Bezugs in welchem die Materie ruht, seine Gültigkeit behalte. Wir fassen Materiestelle m ins Auge, die sich in einem bestimmten Weltpun befindet, und spalten nach ihrer Weltrichtung $\mathfrak{u}$ in Raum und Zeit. m momentan in $R_\mathfrak{u}$. μ_0 sei in $R_\mathfrak{u}$ die Dichte der Materie im Pun Nach Verlauf der unendlichkleinen Zeit ds habe m die Weltrichtung $\mathfrak{u}$ + Aus $(\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = -1$ folgt

$$(\mathfrak{u} \cdot d\mathfrak{u}) = 0;$$

mithin gilt bei der Spaltung nach $\mathfrak{u}$:

$$\mathfrak{u} = 1 \mid 0, \quad d\mathfrak{u} = 0 \mid d\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{p} = 0 \mid \mathfrak{p}.$$

Aus

$$\mathfrak{u} + d\mathfrak{u} = 1 \mid d\mathfrak{v}$$

geht hervor, daß dabei $d\mathfrak{v}$ die von m (in $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{u}}$) während der Zeit ds gewonnene Relativgeschwindigkeit ist. Es kann kein Zweifel sein, daß das mechanische Grundgesetz lautet:

$$\mu_0 \frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{p}\,.$$

Daraus folgt aber sofort die von jeder Zerspaltung unabhängige invariante Form

$$\mu_0 \frac{d\mathfrak{u}}{ds} = \mathfrak{p}\,; \tag{49}$$

μ_0 ist die *Ruhdichte*, ds die während der unendlichkleinen Verschiebung des Masseteilchens, bei welcher seine Weltrichtung den Zuwachs $d\mathfrak{u}$ erfährt, verfließende *Eigenzeit*.

Die Zerspaltung nach $\mathfrak{u}$ wäre eine solche, die während der Bewegung des Masseteilchens wechselt. Spalten wir aber jetzt in Raum und Zeit nach irgend einem festen zeitartigen, in die Zukunft weisenden, der normierenden Bedingung $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}) = -1$ genügenden Vektor $\mathfrak{e}$, so zerlegt sich (49) nach (48) in

$$\left\{\begin{aligned} \mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right) &= \lambda\,, \\ \mu_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) &= \mathfrak{p}\,. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Bedeutet bei der jetzigen Zerspaltung t die Zeit, dV das Volumen und dV_0 das Ruhvolumen des Masseteilchens in einem bestimmten Augenblick, $m = \mu_0 dV_0$ aber dessen Masse,

$$\mathfrak{p}\,dV = \mathfrak{P}\,, \qquad \lambda\,dV = \varLambda$$

die auf das Masseteilchen einwirkende Kraft und deren Leistung, so liefern unsere Gleichungen durch Multiplikation mit dV, wenn man noch beachtet, daß

$$\mu_0\,dV \cdot \frac{d}{ds} = m\sqrt{1-v^2} \cdot \frac{d}{ds} = m \cdot \frac{d}{dt}$$

ist, und daß die Masse m während der Bewegung erhalten bleibt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \varLambda\,, \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \mathfrak{P}\,. \tag{52}$$

Das sind die mechanischen Gleichungen für den Massenpunkt. Die Impulsgleichung (52) hat gegenüber der Newtonschen nur die Änderung erfahren, daß der kinetische Impuls des Massenpunktes

$$\text{nicht} = m\mathfrak{v}, \quad \text{sondern} = \frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

ist. Die Energiegleichung (51) mutet zunächst fremd an; entwickelt aber nach Potenzen von v, so ist

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + \cdots,$$

und wir werden unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von des konstanten Gliedes auf den klassischen Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ für die tische Energie zurückgeführt.

Wie man sieht, sind die Abweichungen von der Newtonschen Mec wie wir vermuteten, nur von der Größenordnung des Quadrats d der Lichtgeschwindigkeit gemessenen Geschwindigkeit des Massenpu bei den kleinen Geschwindigkeiten, mit denen wir es in der Mec stets zu tun haben, wird daher experimentell kein Unterschied festzu sein. Er wird erst bei Geschwindigkeiten merklich werden, die der geschwindigkeit nahekommen; bei diesen nimmt der Trägheitswide der Materie gegen die beschleunigende Kraft in solcher Weise zu die Lichtgeschwindigkeit niemals erreicht wird. In den freien neg Elektronen, die sich in den *Kathodenstrahlen* und der von einem aktiven Körper ausgehenden β-Strahlung bewegen, haben wir Korp kennen gelernt, deren Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit ver bar ist; für sie ist nun in der Tat durch Versuche von Kaufmann, Bu Ratnowski und Hupka das von der Relativitätstheorie geforderte Ve bei longitudinaler Beschleunigung durch ein elektrisches und transv Beschleunigung durch ein Magnetfeld experimentell festgestellt wor

Erst wenn wir denjenigen Grundgleichungen der Elektronent die wir in § 19 auf eine dem Relativitätsprinzip genügende inv Form gebracht haben, die Gleichung $s^i = \varrho_0 u^i$, die Aussage, d Elektrizität an der Materie haftet, und die mechanischen Grundgleic hinzugefügt haben, erhalten wir einen zyklisch geschlossenen Ge zusammenhang, in dem eine wirkliche, von Bezeichnungskonve unabhängige Aussage über den Verlauf von Naturerscheinungen en ist. Erst jetzt also können wir eigentlich behaupten, für ein g Gebiet, das der elektromagnetischen Vorgänge, die Gültigkeit de tivitätsprinzips nachgewiesen zu haben.

Im elektromagnetischen Feld leitet sich der ponderomotorische V ab aus einem nur von den lokalen Werten der Zustandsgrößen abh Tensor S_{ik} nach den Formeln

$$p_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k}.$$

Gemäß der universellen Bedeutung, welche wir dem Energiebe der Naturwissenschaft zuschreiben, haben wir anzunehmen, daß di nur für das elektromagnetische Feld, sondern für jedes physikalis scheinungsgebiet zutrifft, und daß es überhaupt zweckmäßig ist, au Tensor statt auf die ponderomotorische Kraft als die ursprünglich

zurückzugreifen. Für jedes Erscheinungsgebiet handelt es sich darum, zu ermitteln, in welcher Weise der Energie-Impuls-Tensor (der ein Linientensor 2. Stufe ist, so daß seine Komponenten S_{ik} stets der Symmetriebedingung genügen müssen) von den charakteristischen Feld- oder Zustandsgrößen abhängt. Auch die linke Seite der mechanischen Gleichungen

$$\mu_0 \frac{du_i}{ds} = p_i$$

kann ohne weiteres auf einen »kinetischen« Energie-Impuls-Tensor zurückgeführt werden:

$$R_{ik} = \mu_0 u_i u_k .$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial R_i^k}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + \mu_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} .$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist $= 0$ wegen der Kontinuitätsgleichung der Materie, das zweite wegen

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{du_i}{ds}:$$

$= \mu_0 \frac{du_i}{ds}$. *Demgemäß besagen die mechanischen Gleichungen, daß der gesamte Energie-Impuls-Tensor*

$$T_{ik} = R_{ik} + S_{ik} ,$$

zusammengesetzt aus dem kinetischen R und dem potentiellen S, den Erhaltungssätzen genügt:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 .$$

Damit hat das Prinzip von der Erhaltung der Energie seine beste Formulierung erfahren; es ist aber nach der Relativitätstheorie unlöslich verknüpft mit dem Prinzip von der Erhaltung des Impulses, und *dem Begriff des Impulses muß eine ebenso universelle Bedeutung zukommen wie dem der Energie.* Drücken wir den kinetischen Tensor an einer Weltstelle in einem solchen normalen Koordinatensystem aus, relativ zu dem die Materie daselbst momentan ruht, so nehmen seine Komponenten eine außerordentlich einfache Gestalt an: es ist $R_{00} = \mu_0$ (oder $= c^2\mu_0$, wenn das CGS-System benutzt wird, in welchem c nicht $= 1$ ist), und alle übrigen Komponenten verschwinden. Dies legt den Gedanken nahe, daß die Masse als zusammengeballte potentielle Energie aufzufassen ist, die durch den Raum fortschreitet.

§ 24. Die Materie.

Den eben ausgesprochenen Gedanken genauer auszulegen, knüpfen wir an die Bewegung eines Elektrons an. Bisher haben wir uns vorgestellt, daß in seiner Bewegungsgleichung (52) für die Kraft $\mathfrak{P}$ diejenige

$$\mathfrak{P} = e(\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}]) \quad (e = \text{Ladung des Elektrons})$$

einzutreten hat, die sich aus dem von außen angelegten elektrischen u magnetischen Feld $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ergibt. Tatsächlich unterliegt aber das Ele tron während der Bewegung nicht nur der Einwirkung dieses äußer sondern auch des von ihm selbst erzeugten und mitgeführten Feld Bei dessen Ermittlung tritt uns die Schwierigkeit entgegen, daß wir Konstitution des Elektrons nicht kennen, daß uns insbesondere die Na und Gesetzmäßigkeit des Kohäsionsdrucks unbekannt ist, der das Elekt entgegen den enormen Fliehkräften der in ihm zusammengedrängten gativen Ladung zusammenhält. Jedenfalls ist aber das ruhende Elekt mitsamt seinem elektrischen Felde (dies rechnen wir durchaus mit z Elektron) ein in statischem Gleichgewicht befindliches physikalisches Syst und darauf allein kommt es an. Wir benutzen ein normales Koordinat system, in welchem das Elektron ruht. Der Energietensor (außerhalb innerhalb des Elektrons) habe die Komponenten t_{ik}. Daß im Elekt Ruhe herrscht, drückt sich dadurch aus, daß der Energiestrom mit Komponenten t_{0i} ($i = 1, 2, 3$) verschwindet. Die 0te der Gleichgewic bedingungen

$$(53) \qquad \frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} = 0$$

ergibt dann, daß die Energiedichte t_{00} von der Zeit x_0 unabhängig Wegen der Symmetrie sind auch die Komponenten t_{i0} ($i = 1, 2, 3$) Impulsdichte $= 0$. Ist $\mathfrak{t}^{(1)}$ der Vektor mit den Komponenten t_{11}, t_{12}, so liefert die Gleichgewichtsbedingung (53) ($i = 1$):

$$\operatorname{div} \mathfrak{t}^{(1)} = 0 .$$

Wenden wir den Gaußschen Satz auf eine Fläche an, die aus einem S einer das Elektron senkrecht zur x_1, x_2 oder x_3 Achse durchschneide Ebene besteht und durch eine außerhalb des vom Elektron eingenomm Raumgebiets verlaufende krumme Fläche geschlossen wird, so erg sich die Gleichungen

$$\int t_{11}\, dx_2\, dx_3 = 0, \quad \int t_{12}\, dx_1\, dx_3 = 0, \quad \int t_{13}\, dx_1\, dx_2 = 0,$$

wobei sich die Integrale jedesmal über jenen ebenen Querschnitt Elektrons erstrecken. Integriert man noch die erste Gleichung nac die zweite nach x_2, die dritte nach x_3, so findet man, daß zwar die t_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), wohl aber ihre Volumintegrale $\int t_{ik}\, d V_0$ schwinden. Diese Umstände dürfen wir für jedes im statischen G gewicht befindliche System als zutreffend erachten. Das gewonnen sultat läßt sich in einem beliebigen Koordinatensystem durch die invari Formeln ausdrücken:

$$(54) \qquad \int t_{ik}\, d V_0 = E_0\, u_i u_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

E_0 ist der (im Bezugsraum, in welchem das Elektron ruht, geme Energieinhalt, u_i sind die kovarianten Komponenten der Weltrichtun Elektrons und $d V_0$ das (gemäß der Vorstellung, daß der ganze Rau der Bewegung des Elektrons teilnehme, berechnete) Ruhvolumen

Raumelements. (54) gilt streng bei gleichförmiger Translation; wir werden die Formel aber auch auf ungleichförmige Bewegung anwenden dürfen, wenn $\mathfrak{u}$ räumlich und zeitlich nicht zu rasch veränderlich ist. Dann aber sind die Komponenten

$$\bar{p}^i = -\frac{\partial t^{ik}}{\partial x_k}$$

der ponderomotorischen Wirkung, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, nicht mehr $= 0$.

Setzen wir das Elektron als völlig masselos voraus und ist p_i die von außen einwirkende »Viererkraft«, so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$\bar{p}^i + p^i = 0 \tag{55}$$

wird. Wir spalten nach einem festen $\mathfrak{e}$ in Raum und Zeit:

$$\mathfrak{u} = h \mid h\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{p} = (p^i) = \lambda \mid \mathfrak{p}$$

und integrieren (55) nach dem Volumen $dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2}$. Da bei Benutzung eines zu $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{e}}$ gehörigen normalen Koordinatensystems

$$\int \bar{p}^i \, dV = \int \bar{p}^i \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = -\frac{d}{dx_0} \int t^{i0} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$
$$= -\frac{d}{dx_0} \left(E_0 \, u^0 u^i \sqrt{1 - v^2}\right) = -\frac{d}{dt} (E_0 \, u^i)$$

ist ($x_0 = t$ die Zeit), so kommt dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = A \left(= \int \lambda \, dV\right),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \mathfrak{P} \left(= \int \mathfrak{p} \, dV\right).$$

Diese Gleichungen sind gültig, wenn die von außen angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ (im Vergleich zu $\frac{E_0}{a}$, $a =$ Elektronenradius) nicht zu groß ist und ihre Dichte im Bereich des Elektrons wesentlich konstant. Sie stimmen aber genau mit den mechanischen Grundgleichungen überein, wenn nur die Masse m ersetzt wird durch E_0. Mit andern Worten: *die Trägheit ist eine Eigenschaft der Energie.* — In der Mechanik wird jedem materiellen Körper eine unveränderliche Masse m zugeschrieben, die zufolge der bekannten Art und Weise, wie sie in das Grundgesetz der Mechanik eingeht, die Trägheit, den Widerstand der Materie gegen beschleunigende Kräfte darstellt. Die Mechanik nimmt diese träge Masse als etwas Gegebenes hin, für das sie nach keiner weiteren Erklärung sucht. Hier aber erkennen wir: die in dem materiellen Körper enthaltene potentielle Energie ist die Ursache dieser Trägheit, und zwar entspricht im *CGS*-System, in welchem die Lichtgeschwindigkeit nicht $= 1$ ist, der Energie E_0 die Masse

$$m = \frac{E_0}{c^2}. \tag{56}$$

Damit ist eine neue, rein dynamische Auffassung der Materi
wonnen*). Wie wir uns in der Relativitätstheorie von dem Gl
haben befreien müssen, daß wir einen Raumpunkt zu verschiedenen Z
wiedererkennen können, so *hat es jetzt auch keinen Sinn mehr, von*
selben« Stelle der Materie zu verschiedenen Zeiten zu sprechen. Das Ele
das man sich früher wohl als einen substantiellen Fremdkörper im
stanzlosen elektromagnetischen Felde vorstellte, erscheint uns nur
als ein gegen das Feld keineswegs scharf begrenzter kleiner Bezi
welchem die Feldgrößen und die elektrische Dichte enorm hohe
annehmen. Ein solcher »Energieknoten« pflanzt sich durch den
Raum nicht anders fort wie eine Wasserwelle über die Seefläche
schreitet; es gibt da nicht »ein und dieselbe Substanz«, aus de
Elektron zu allen Zeiten besteht. Es existiert nur der potentielle,
daneben noch ein kinetischer Energie-Impuls-Tensor. Die Spaltung zwi
beiden, die in der Mechanik auftritt, ist nur die Scheidung zwische
breit und dünn im Felde verteilten Energie und der in den Energiek
den Elektronen und Atomen zusammengeballten; die Grenze zwischen
ist durchaus fließend. Es ist die Aufgabe der Feldtheorie, zu er
warum das Feld eine derartige körnige Struktur besitzt und jene E
knoten sich im Hin- und Herströmen von Energie und Impuls d
erhalten (wenn auch natürlich nicht völlig unveränderlich, so do
einem außerordentlich hohen Grad von Genauigkeit): darin beste
Problem der Materie. Die Maxwell-Lorentzsche Theorie kann es
deshalb nicht lösen, weil in ihr der Kohäsionsdruck fehlt, welch
Elektron zusammenhält. *Was wir gemeinhin Materie nennen, ist*
Wesen nach atomistisch; denn die diffus verteilte Feldenergie pfleg
nicht als einen materiellen Körper anzusprechen. Freilich sind *die*
und Elektronen keine letzten unveränderlichen Elemente, an welch
Naturkräfte nur von außen anpacken, sie hin- und herschiebend; s
sie sind selber kontinuierlich ausgebreitet und in ihren feinsten
feinen fließenden Veränderungen unterworfen. Nicht das Feld be
seiner Existenz der Materie als seines Trägers, sondern *die Mat*
umgekehrt *eine Ausgeburt des Feldes*; die Formeln, welche die K
nenten des Energietensors T_{ik} durch die Zustandsgrößen des Feld
drücken, lehren, *nach welchen Gesetzen* das Feld mit Energie und
d. h. mit Materie verknüpft ist. Da keine strenge Grenze zwisc
diffusen Feldenergie und derjenigen der Elektronen und Atome
müssen wir den Begriff der Materie, falls er einen *exakten* Sinn h
soll, weiter fassen als bisher: Materie nennen wir fortan dasjenig
welches dargestellt wird durch den Energie-Impuls-Tensor. In
Sinne ist auch das optische Feld z. B. mit Materie verknüpft. V

*) Schon Kant lehrt in den »Metaphysischen Anfangsgründen der Nat
schaft«, daß die Materie einen Raum erfüllt nicht durch ihre bloße Existenz,
durch repulsive Kräfte aller ihrer Teile.

so die Materie, prinzipiell gesprochen, im Felde auflöst, löst sich die Mechanik in der Physik auf. Denn das Erhaltungsgesetz der Materie

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0, \tag{57}$$

das mechanische Grundgesetz, stellt, wenn man die T_{ik} durch die Feldgrößen ausdrückt, einen differentiellen Zusammenhang zwischen diesen dar, muß also aus den Feldgleichungen folgen. Die Materie in dem weiten Sinne, wie wir jetzt das Wort nehmen, ist dasjenige, von dem wir direkt durch unsere Sinne Kunde erhalten. Fasse ich ein Stück Eis an, so nehme ich den an der Berührungsstelle zwischen jenem Körper und meinem Sinnesleib fließenden Energiestrom als Wärme, den Impulsstrom als Druck wahr; der optische Energiestrom an der Oberfläche des Sinnesepithels meines Auges bestimmt die optischen Wahrnehmungen, die ich habe. Hinter dieser uns durch die Sinnesorgane direkt offenbarten Materie verborgen aber steckt das *Feld.* Für die Aufdeckung seiner eignen Gesetzmäßigkeit und der Gesetze, nach welchen es die Materie bestimmt, ist die Maxwellsche Theorie der erste glänzende Anfang; aber hier stehen wir mit unserer Erkenntnis noch nicht am Ziel.

Nach der Formel (56) müssen wir, um die Trägheit der Körper zu erklären, ihnen einen sehr beträchtlichen Energieinhalt zuschreiben: in 1 kg Wasser stecken $9 \cdot 10^{23}$ Erg. Diese Energie ist zu einem kleinen Teil die Kohäsionsenergie des Körpers, welche die Moleküle zusammenhält, zu einem größeren die intramolekulare Energie, welche die Atome im Molekül bindet und die z. B. bei einer Explosion plötzlich frei wird, zu einem noch größeren die intraatomistische, welche die Bausteine des Atoms, die negativen Elektronen und den positiven Atomkern aneinander bindet und deren allmähliches Freiwerden wir in dem radioaktiven Zerfall beobachten; sie ist endlich zum weitaus größten Teil die Eigenenergie des Atomkerns und der Elektronen selbst; die letztere tritt nur in der Trägheit zu Tage, da wir bislang keine Mittel kennen — Gott sei Dank! —, sie zur »Explosion« zu bringen. *Die träge Masse verändert sich mit dem Energieinhalt*: erwärmt man einen Körper, so nimmt seine träge Masse zu, kühlt man ihn ab, so vermindert sie sich; freilich ist dieser Effekt zu klein, um der direkten Beobachtung zugänglich zu sein.

Die hier nach Laue [13]) allgemein für ein im statischen Gleichgewicht befindliches System durchgeführte Überlegung wurde zuerst, noch vor der Einsteinschen Entdeckung des Relativitätsprinzips, am Elektron unter Zugrundelegung spezieller Voraussetzungen über dessen Konstitution angestellt: man nahm es als eine auf der Oberfläche oder im ganzen Innern gleichförmig geladene Kugel an, die durch allseitig gleichen, gegenwirkenden Kohäsionsdruck zusammengehalten wird. Die daraus sich ergebende »elektromagnetische Masse« $\frac{E_0}{c^2}$ befindet sich in numerischer Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man dem Elektron einen

Radius von der Größenordnung 10^{-13} cm zuschreibt. Man darf sich
wundern, daß schon vor der Relativitätstheorie eine derartige De
der Elektronenträgheit möglich war; denn indem man Maxwellsche El
dynamik trieb, stand man ja schon immer für dieses Erscheinungs
unbewußt auf dem Boden des Relativitätsprinzips. Die allgemein
kenntnis von der Trägheit der Energie verdanken wir Einstein und Plan
Planck stützte sich bei der Entwicklung der Dynamik auf einen -
Gegensatz zum Elektron — vollständig bekannten, freilich im ge
lichen Sinne nicht-materiellen »Probekörper«, die Hohlraumstrahlu
thermodynamischen Gleichgewicht, wie sie sich nach dem Kirchhof
Gesetz in jedem von gleichmäßig temperierten Wänden umgebenen
raum ausbildet.

In denjenigen phänomenologischen Theorien, in denen wir vo
atomistischen Struktur der Materie absehen, denken wir uns die i
Elektronen, Atomen usw. aufgespeicherte Energie stetig über den K
verteilt; wir haben sie einfach dadurch zu berücksichtigen, daß wir
Energie-Impuls-Tensor — bezogen auf ein Koordinatensystem, in we
die Materie ruht — als Energiedichte die Ruhmassendichte μ_0 einführ
haben wir z. B. in der Hydrodynamik bei Beschränkung auf adiaba
Vorgänge zu setzen

$$|T_i^k| = \left|\begin{array}{c|ccc} -\mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{array}\right| .$$

p ist der allseitig gleiche Druck; der Energiestrom ist bei adiaba
Vorgängen 0. Um die Komponenten dieses Tensors in einem be
Koordinatensystem hinzuschreiben, setze man noch $\mu_0 = \mu^* - p$
erhält man die invarianten Gleichungen

(58) $$T_i^k = \mu^* u_i u^k + p\delta_i^k$$

oder $$T_{ik} = \mu^* u_i u_k + p \cdot g_{ik}.$$

Die Ruhmassendichte ist

$$T_{ik} u^i u^k = \mu^* - p = \mu_0 ,$$

und sie (nicht μ^*) ist also bei inkompressibeln Flüssigkeiten kon
setzen. Wirkt auf die Flüssigkeit keine Kraft, so lauten die hyd
mischen Gleichungen

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 .$$

Auf ähnliche Weise, wie es soeben mit der Hydrodynamik
kann auch der Elastizitätstheorie eine dem Relativitätsprinzip entsp
Form gegeben werden [15]). Es bliebe endlich noch übrig, das Ge
Gravitation, das in seiner Newtonschen Form durchaus an das
Galileische Relativitätsprinzip gebunden ist, dem Einsteinschen an
Sie birgt aber ihre besonderen Rätsel in sich, auf deren Lösun
letzten Kapitel zu sprechen kommen.

§ 25. Die Miesche Theorie.

Innerhalb der Elektronen kann die Maxwell-Lorentzsche Theorie nicht gültig sein; auf dem Standpunkt der gewöhnlichen Elektronentheorie müssen wir daher das Elektron als etwas a priori Gegebenes, als einen Fremdkörper im Felde behandeln. Es ist aber von *Mie* eine allgemeinere Elektrodynamik aufgestellt worden, auf Grund deren es möglich scheint, die Materie aus dem Felde zu konstruieren[16]. Wir wollen ihre Grundlagen hier kurz entwickeln — als Beispiel einer den neuen Ideen über die Materie völlig konformen physikalischen Theorie, das uns hernach noch gute Dienste leisten soll, und um an ihr zugleich das Problem der Materie genauer zu formulieren.

Wir halten daran fest, daß die in Betracht kommenden Zustandsgrößen sind: 1) der vierdimensionale Stromvektor s, die »Elektrizität«, und 2) der Flächentensor 1. Stufe F, das »Feld«. Ihre Eigengesetzlichkeit ist ausgesprochen in den Gleichungen

$$1) \qquad \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0,$$

$$2) \qquad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Die Gleichungen 2) sind erfüllt, wenn F sich aus einem Vektor φ_i ableitet nach den Formeln

$$3) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i};$$

es folgt umgekehrt aus 2), daß ein Vektor φ existieren muß derart, daß die Gleichungen 3) bestehen. Ebenso ist 1) erfüllt, wenn s sich aus einem Flächentensor 1. Stufe H in folgender Weise ableitet:

$$4) \qquad s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k};$$

es folgt umgekehrt aus 1), daß ein diesen Relationen genügender Flächentensor H notwendig existiert. 4) stimmt formal mit dem zweiten System der Maxwellschen Gleichungen überein. Lorentz nahm an, daß allgemein, nicht bloß im Äther, sondern auch im Gebiet der Elektronen, $H = F$ ist. Wir machen nach Mie die allgemeinere Voraussetzung, daß H keine bloße Rechengröße ist, sondern eine reale Bedeutung hat und seine Komponenten daher universelle Funktionen der ursprünglichen Zustandsgrößen s und F sind. Konsequenterweise müssen wir aber dann die gleiche Voraussetzung auch hinsichtlich φ machen! In der entstehenden Größentabelle

φ	F
s	H

nennen wir mit Mie die in der ersten Zeile stehenden die Intensitätsgrößen, sie sind durch die Differentialgleichungen 3) miteinander ver-

knüpft; die in der zweiten Zeile stehenden, für welche die Differen gleichungen 4) gelten, sollen hingegen die Quantitätsgrößen heißen. Sp wir in Raum und Zeit und wenden die schon in § 19 verwendeten zeichnungen an, so haben wir die wohlvertrauten Gleichungen vor

$$1)\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \qquad (\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0),$$

$$3)\quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi = \mathfrak{E} \qquad (-\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \mathfrak{B}),$$

$$4)\quad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\mathfrak{s} \qquad (\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho).$$

Kennen wir die universellen Funktionen, welche φ und H durch s ausdrücken, dann haben wir in den nicht eingeklammerten Gleich jede Komponente besonders gezählt, 10 »Hauptgleichungen« v durch welche die Ableitungen der 10 Zustandsgrößen nach der Abhängigkeit von diesen selbst und ihren räumlichen Ableitungen werden; also jene Form der Naturgesetze, welche durch das *Ka prinzip* gefordert wird. Das Relativitätsprinzip aber, das hier gewissen Gegensatz zum Kausalitätsprinzip tritt, fordert, daß die gleichungen von den eingeklammerten »Nebengleichungen« begleitet in denen keine nach der Zeit differentiierten Glieder auftreten. söhnung des Widerstreits liegt darin, daß die Nebengleichung schüssig sind. Aus den Hauptgleichungen 2) und 3) folgt näm

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{f}) = 0,$$

aus 1) und 4)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathfrak{D}).$$

Ein Vergleich der Mieschen mit den Lorentzschen Grundg der Elektronentheorie ist lehrreich. Bei Lorentz treten 1), auf, und das Gesetz, nach welchem H durch die ursprünglicher größen sich bestimmt, lautet einfach $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$. Hinge dort φ und $\mathfrak{f}$ durch die Gleichung 3) *rechnerisch* definiert, u ein Gesetz, das die Abhängigkeit dieser Potentiale von der größen des Feldes und der Elektrizität festlegt. An dessen die Formel für die Dichte der ponderomotorischen Kraft und nische Grundgesetz für die Bewegung der Elektronen unter dieser Kraft. Da nach unserer neuen Auffassung aber das Gesetz sich aus den Feldgleichungen ergeben muß, ist ein nötig, die von Mie eben in der Annahme, daß φ und $\mathfrak{f}$ ei deutung in dem angegebenen Sinne haben, gefunden wurde. die Miesche Gleichung 3) aber in einer ganz analogen Form

resultierende elektrische Kraft, welcher nun nach Gleichung 3) die Größe $\mathfrak{f}$ als »*elektrischer Impuls*« zugehört. Es ist wunderbar zu sehen, wie in der Mieschen Theorie die Grundgleichung der Elektrostatik (59), die am Anfang der Elektrizitätslehre steht, plötzlich eine viel anschaulichere Bedeutung gewinnt, indem das Potential als elektrischer Druck auftritt; das ist der gesuchte Kohäsionsdruck, welcher das Elektron zusammenhält.

Das Bisherige gibt nur ein leeres Schema, das seine Ausfüllung finden muß durch die noch unbekannten universellen Funktionen, welche die Quantitäts- mit den Intensitätsgrößen verknüpfen. Ihre Ermittlung kann bis zu einem gewissen Grade noch rein spekulativ geschehen durch die Forderung, daß für den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} der Erhaltungssatz (57) gültig sein muß (also durch die Forderung der Geltung des Energieprinzips). Denn das ist gewiß eine notwendige Bedingung, damit sich überhaupt ein Zusammenhang der Theorie mit der Erfahrung herstellen läßt. Das Energiegesetz muß die Form haben

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$$

wo W die Energiedichte, $\mathfrak{S}$ der Energiestrom ist. In der Maxwellschen Theorie findet man es, indem man 2) mit $\mathfrak{H}$, 4) mit $\mathfrak{E}$ multipliziert und addiert:

$$\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -(\mathfrak{E}\mathfrak{s}). \tag{60}$$

In dieser Beziehung tritt auf der rechten Seite noch die Arbeit auf, welche zur Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen oder nach unserer jetzigen Auffassung zur Erhöhung der potentiellen Energie des Feldes im Gebiet der Elektronen verwendet wird. Hier muß dieses Glied also sich gleichfalls noch zusammensetzen lassen aus einem nach der Zeit differentiierten Term und einer div. Behandeln wir aber die Gleichungen 1) und 3) ganz analog, wie wir eben mit 2) und 4) verfahren sind, d. h. multiplizieren 1) mit φ und 3) skalar mit $\mathfrak{s}$, so kommt

$$\varphi\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi\mathfrak{s}) = (\mathfrak{E}\mathfrak{s}). \tag{61}$$

Die Addition von (60) und (61) ergibt das Energiegesetz; es muß demnach der Energiestrom

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \varphi\mathfrak{s}$$

sein und

$$\varphi\,\delta\varrho + \mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{f} + \mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{D} = \delta W$$

Zustandsgrößen ϱ, $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ auf. Um da Ordnung zu schaffen, ... wir anstelle von ϱ und $\mathfrak{D}$ bzw. φ und $\mathfrak{E}$ als Unabhängige ein; dar... wird erreicht, daß die sämtlichen Intensitätsgrößen als unabhängige Varia... fungieren. Man hat zu bilden

$$\tfrac{1}{2}L = W - \mathfrak{E}\mathfrak{D} - \varrho\varphi; \tag{62}$$

dann ist

$$\tfrac{1}{2}\delta L = (\mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\,\delta\mathfrak{E}) + (\mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{f} - \varrho\,\delta\varphi).$$

Kennt man L als Funktion der Intensitätsgrößen, so sind durch d... Gleichung die Quantitätsgrößen als Funktionen derselben bestimmt. ... *der zehn unbekannten universellen Funktionen haben wir jetzt nur ... eine*, L; das ist die Leistung des Energieprinzips.

Kehren wir zur vierdimensionalen Schreibweise zurück, so ergibt ...

$$\tfrac{1}{2}\delta L = \tfrac{1}{2}H^{ik}\,\delta F_{ik} + s^i\,\delta\varphi_i. \tag{63}$$

Daraus geht hervor, daß δL, mithin L, die »*Hamiltonsche Funk*... eine Invariante ist. Die einfachsten Invarianten, welche sich von ... Vektor mit den Komponenten φ_i und einem Flächentensor mit den ... ponenten F_{ik} bilden lassen, sind die ins Quadrat erhobenen Beträ...

des Vektors φ^i: $\quad \varphi_i\varphi^i$,

des Flächentensors F_{ik}: $\quad L^\circ = \tfrac{1}{2}F_{ik}F^{ik}$,

des Vektors $\quad F_{ik}\varphi^k$ und

des »Raumtensors« mit den Komponenten $F_{kl}\varphi_i + F_{li}\varphi_k + F_{i}$...

Wie in der dreidimensionalen Geometrie der wichtigste Kongru... aussagt, daß ein Vektorpaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ im Sinne der Kongruenz voll... charakterisiert ist durch die Invarianten $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}^2$, so läßt sich ... vierdimensionalen Geometrie leicht zeigen, daß die eben angeg... Invarianten die aus einem Vektor φ und einem Flächentensor F bes... Figur im Sinne der Kongruenz vollständig festlegen. Jede Inv... insbesondere die Hamiltonsche Funktion L, muß sich mithin du... vier Größen algebraisch ausdrücken lassen. Auf die Bestimmun... Ausdrucks reduziert die Miesche Theorie das Problem der Mate... Maxwellsche Theorie des Äthers, nach der freilich Elektrone... möglich sind, ist in ihr als der Spezialfall $L = L^\circ$ enthalten. ... man auch W und die Komponenten von $\mathfrak{S}$ vierdimensional aus... kennt man, daß sie die (negative) 0te Zeile in dem Schema

$$T_i^k = F_{ir}H^{kr} + \varphi_i s^k - \tfrac{1}{2}L\cdot\delta_i^k \tag{64}$$

bilden. Die T_i^k sind also die gemischten Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, welcher nach unseren Rechnungen dem Erhaltungssatz (57) für $i = 0$ und demnach auch für $i = 1, 2, 3$ genügt. Der Beweis, daß seine kovarianten Komponenten der Symmetriebedingung $T_{ki} = T_{ik}$ genügen, wird im nächsten Kapitel nachgeholt werden.

Die Feldgesetze können in ein sehr einfaches Variationsprinzip, *das Hamiltonsche Prinzip*, zusammengefaßt werden. Wir betrachten als unabhängige Zustandsgröße jetzt allein das Potential mit den Komponenten φ_i und *definieren* das Feld durch die Gleichung

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

In die Gesetze geht die invariante Hamiltonsche Funktion L ein, welche vom Potential und Feld abhängt. Wir *definieren* den Stromvektor s und den Flächentensor H durch (63). Ist bei Benutzung eines beliebigen affinen Koordinatensystems

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

das vierdimensionale »Volumelement« der Welt ($-g$ die Determinante der metrischen Fundamentalform), so ist das über irgend ein Weltgebiet erstreckte Integral $\int L\, d\omega$ eine Invariante; sie heißt die in dem betr. Gebiet enthaltene *Wirkungsgröße*, L ist die »Weltdichte der Wirkung«. Das Hamiltonsche Prinzip behauptet, daß die Wirkungsgröße für jedes Weltgebiet einen stationären Wert annimmt, in dem Sinne, daß

$$(65) \qquad \delta \int L\, d\omega = 0$$

ist für jede an der Grenze des Gebiets verschwindende infinitesimale Variation $\delta\varphi_i$ des Potentials. In der Tat ist

$$(66) \qquad \tfrac{1}{2}\delta \int L\, d\omega = \int \{\tfrac{1}{2} H^{ik}\, \delta F_{ik} + s^i\, \delta\varphi_i\}\, d\omega\,,$$

und da Differentiation und Variation vertauschbar sind, hat man zu setzen

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta\varphi_k)}{\partial x_i}.$$

Es ist ferner

$$\tfrac{1}{2} H^{ik}\, \delta F_{ik} = H^{ik} \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k},$$

und durch partielle Integration kommt

$$\int H^{ik} \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x_k}\, d\omega = -\int \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} \cdot \delta\varphi_i\, d\omega\,;$$

also ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}\delta \int L\, d\omega = \int \left\{ -\frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} + s^i \right\} \delta\varphi_i \cdot d\omega\,.$$

Während 3) durch Definition sichergestellt ist, liefert somit das Hamiltonsche Prinzip die Feldgleichungen 4); 1) und 2) folgen aus 3) und 4).

So drängt sich denn schließlich die Miesche Elektrodynamik in das einfache Wirkungsprinzip (65) *zusammen* — ganz analog, wie auch die Entwicklung der Mechanik schließlich im Wirkungsprinzip gipfelte. Während aber in der Mechanik zu jedem vorgegebenen mechanischen System eine bestimmte Wirkungsfunktion L gehört, die es aus dessen Konstitution zu ermitteln gilt, haben wir es hier mit einem einzigen System, der Welt, zu tun. Das eigentliche Problem der Materie hebt damit erst an: es handelt sich darum, die der Welt zukommende Wirkungsfunktion, die »Weltfunktion« L zu bestimmen; ihm stehen wir vorerst noch ratlos gegenüber. Wählen wir in willkürlicher Weise ein L, so erhalten wir eine von dieser Wirkungsfunktion beherrschte »mögliche« Welt, in der wir uns (wenn uns nur die mathematische Analysis nicht im Stiche läßt) vollständig auskennen — viel besser als in der wirklichen. Es käme aber natürlich darauf an, unter all diesen möglichen Welten die einzige existierende *wirkliche* herauszufinden; nach allem, was wir von den Naturgesetzen wissen, muß das ihr zukommende L durch einfache mathematische Eigenschaften ausgezeichnet sein. Wieder ist die Physik, heute als Feldphysik, auf dem Wege, die Gesamtheit der Naturerscheinungen auf *ein einziges Naturgesetz* zurückzuführen, ein Ziel, dem sie schon einmal, als die durch Newtons Principia begründete mechanische Massenpunkt-Physik ihre Triumphe feierte, nahe zu sein glaubte. Doch ist auch heut dafür gesorgt, daß unsere Bäume nicht in den Himmel wachsen. Wir wissen ja nicht, ob wir mit denjenigen Zustandsgrößen, welche der Mieschen Theorie zugrunde liegen, zur Beschreibung der Materie ausreichen, ob sie tatsächlich rein »elektrischer« Natur ist. Vor allem aber hängt die dunkle Wolke aller jener Erscheinungen, mit denen wir uns heute notdürftig vermittels des Wirkungsquantums auseinandersetzen, über dem Land der physikalischen Erkenntnis, wer weiß welch neuen Umsturz drohend.

Versuchen wir es einmal mit dem folgenden Ansatz für L:

(67) $$L = |F|^2 + 2w\left(\sqrt{\varphi_i \varphi^i}\right)$$

(w eine willkürliche Funktion einer Variablen), der sich zunächst als der einfachste, über die Maxwellsche Theorie hinausgehende darbietet, — obschon durchaus kein Grund vorliegt, anzunehmen, daß die Weltfunktion in Wirklichkeit diese Gestalt besitzt. Wir beschränken uns auf die Betrachtung statischer Lösungen, für die

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = 0\,, \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{f} = 0$$

ist. Wir haben

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \varphi\,, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,, \qquad \varrho = -w'(\varphi)$$

(der Akzent bedeutet die Ableitung). Gegenüber der gewöhnlichen Elektrostatik im Äther ist hier das Neue, daß die Dichte ϱ eine universelle Funktion des Potentials, des elektrischen Drucks φ ist. Es ergibt sich als »Poissonsche Gleichung«

$$\Delta \varphi + w'(\varphi) = 0\,.$$

Eine (im Unendlichen verschwindende) Lösung dieser Gleichung stellt einen möglichen elektrischen Gleichgewichtszustand, ein mögliches für sich existenzfähiges Korpuskel in der Welt dar, die wir jetzt konstruieren. Das Gleichgewicht wird nur dann stabil sein können, wenn die Lösung Kugelsymmetrie hat. In diesem Fall lautet die Gleichung, unter r den Radius vector verstanden,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + w'(\varphi) = 0\,. \tag{68}$$

Ist w keine gerade Funktion von φ, so wird mit φ im allgemeinen nicht auch $-\varphi$ eine Lösung sein; d. h. unter diesen Umständen sind *positive und negative Elektrizität wesensverschieden.* In der Tat wird aber w keine gerade Funktion sein können, wenn in unserer Welt Materie existieren soll, die sich im Spiel der Kräfte erhält. Denn nur wenn w nicht gerade ist, hat das Grundgesetz (67) die Konsequenz, daß

$$\sqrt{\varphi_i\varphi^i} = \sqrt{\varphi^2 - \mathfrak{f}^2}$$

oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, $\sqrt{\varrho^2 - \mathfrak{s}^2}$ immer reell bleibt; dies aber muß der Fall sein, wenn ein stabiles Elektron existiert, da alsdann seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ($\mathfrak{s} = \varrho\mathfrak{v}$) die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigen kann. So gewährt die Miesche Theorie prinzipiell die Möglichkeit, in Zusammenhang mit der Existenz der Materie die in unserer wirklichen Welt stattfindende Wesensverschiedenheit von positiver und negativer Elektrizität zu verstehen, über die weder die Maxwellsche noch die Elektronentheorie Rechenschaft zu geben vermögen.

Soll (68) eine bei $r = \infty$ reguläre Lösung

$$-\varphi = \frac{e_0}{r} + \frac{e_1}{r^2} + \cdots \tag{69}$$

besitzen, so findet man durch Einsetzen dieser Potenzentwicklung in das erste Glied der Gleichung, daß die Entwicklung von $w'(\varphi)$ mit der Potenz r^{-4} oder einer noch höheren negativen beginnt, daß folglich $w(x)$ für $x = 0$ mindestens von 5ter Ordnung 0 sein muß. Unter dieser Voraussetzung hat aber die Gleichung ∞^1 bei $r = 0$ und ∞^1 bei $r = \infty$ reguläre Lösungen. Man wird (als »allgemeinen« Fall) erwarten dürfen, daß diese beiden *eindimensionalen* Lösungsscharen (innerhalb der zweidimensionalen Gesamtschar aller Lösungen) eine endliche oder jedenfalls eine diskrete Anzahl von Lösungen gemein haben. Diese würden die verschiedenen möglichen Korpuskeln (Elektronen und Atomkerne?) darstellen. Es ist freilich nicht *ein* Elektron oder ein Atomkern allein auf der Welt; aber die Abstände zwischen ihnen sind im Vergleich zu ihrer eigenen Ausdehnung doch so groß, daß durch ihre gegenseitige Einwirkung der Feldverlauf im Innern des einzelnen Elektrons oder Atomkerns nicht wesentlich modifiziert wird. Ist φ die ein solches Korpuskel darstellende Lösung (69) von (68), so ist die Gesamtladung desselben

$$= - 4\pi \int_0^\infty w'(\varphi)\, r^2\, dr = - 4\pi \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dr}\Big|_{r=\infty} = 4\pi e_0 ,$$

seine Masse aber berechnet sich als das Integral der Energiedichte W, die aus (62) hervorgeht:

$$Masse = 4\pi \int_0^\infty \{\tfrac{1}{2} (\text{grad}\, \varphi)^2 + w(\varphi) - \varphi w'(\varphi)\}\, r^2\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \{w(\varphi) - \tfrac{1}{2} \varphi w'(\varphi)\}\, r^2 dr .$$

Wir können also *aus den Naturgesetzen die Masse und Ladung des Elektrons, die Atomgewichte und Atomladungen der einzelnen existierenden Elemente berechnen*, während wir bisher diese letzten Bausteine der Materie immer als etwas mit seinen numerischen Eigenschaften Gegebenes hingenommen haben. Zwar bleibt das einstweilen nur ein *Programm*, solange wir die Weltfunktion L nicht kennen; der eben zugrunde gelegte spezielle Ansatz (67) sollte nur dazu dienen, klar zu machen, ein wie tiefes und gründliches, auf Gesetze basiertes Verständnis für die Materie und ihre Konstitution uns die Kenntnis der Wirkungsfunktion eröffnen würde. Im übrigen kann die Diskussion derartiger willkürlich gewählter Ansätze nicht weiter führen, sondern es werden neue physikalische Einsichten und Prinzipien nötig sein, die uns den richtigen Weg zur Bestimmung der Hamiltonschen Funktion weisen.

Die große Erkenntnis, zu der wir in diesem Kapitel gelangt sind, ist die, daß der Schauplatz der Wirklichkeit nicht ein dreidimensionaler Euklidischer Raum ist, sondern *die vierdimensionale Welt, in der Raum und Zeit in unlöslicher Weise miteinander verbunden sind.* So tief die Kluft ist, welche für unser Erleben das anschauliche Wesen von Raum und Zeit trennt — von diesem qualitativen Unterschied geht in jene objektive Welt, welche die Physik aus der unmittelbaren Erfahrung herauszuschälen sich bemüht, nichts ein. Sie ist ein vierdimensionales Kontinuum, weder »Raum« noch »Zeit«; nur das an einem Stück dieser Welt hinwandernde Bewußtsein erlebt den Ausschnitt, welcher ihm entgegenkommt und hinter ihm zurückbleibt, als *Geschichte*, als einen in zeitlicher Entwicklung begriffenen, im Raume sich abspielenden Prozeß.

Diese vierdimensionale Welt ist *metrisch*, wie der Euklidische Raum; aber die quadratische Form, welche die Metrik bestimmt, ist nicht positiv-definit, sondern hat *eine* negative Dimension. Dieser Umstand ist zwar mathematisch belanglos, aber für die Wirklichkeit und ihren Wirkungszusammenhang von tiefer Bedeutung. Es war nötig, den in mathematischer Hinsicht so einfachen Gedanken der metrischen vierdimensionalen Welt nicht nur in isolierter Abstraktion zu erfassen, sondern ihn in seine wichtigsten Konsequenzen für die Auffassung der physikalischen Vorgänge

zu verfolgen, um zu einem lebendigen Verständnis seines Inhalts und seiner Tragweite zu gelangen; das sollte hier in aller Kürze versucht werden. Es bleibt merkwürdig, daß die dreidimensionale Geometrie der statischen Welt, die schon von Euklid in ein vollendetes axiomatisches System gebracht wurde, für uns einen so einleuchtenden Charakter besitzt, während wir uns der vierdimensionalen erst in zähem Ringen und im Anschluß an ein ausgedehntes physikalisch-empirisches Material haben bemächtigen können. Erst mit der Relativitätstheorie ist unsere Naturerkenntnis (darf man sagen) der Tatsache der Bewegung, der Veränderung in der Welt vollständig gerecht geworden.

Kapitel IV.

Gravitation.

§ 26. Relativität der Bewegung, metrisches Feld und Gravitation[1]).

In so vollendeter Weise auch immer das Einsteinsche Relativitätsprinzip, das wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, den aus der Erfahrung gewonnenen, den Wirkungszusammenhang der Welt präzisierenden Naturgesetzen gerecht wird — in erkenntnistheoretischer Hinsicht können wir uns nicht mit ihm zufrieden geben. Greifen wir noch einmal auf den Anfang des letzten Kapitels zurück! Wir lernten damals ein »kinematisches« Relativitätsprinzip kennen. $x_1\,x_2\,x_3$, t waren die Raum-Zeit-Koordinaten eines Weltpunktes, bezogen auf ein bestimmtes dauernd vorhandenes Cartesisches Koordinatensystem im Raum, $x'_1\,x'_2\,x'_3$, t' die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf ein zweites solches System, das zu dem ersten in beliebiger Bewegung begriffen sein kann; zwischen ihnen bestehen die Transformationsformeln (II), S. 116. Wir sahen mit voller Evidenz ein, daß zwei physikalische Zustandsverläufe objektiv in keiner Weise voneinander verschieden sind, wenn die Zustandsgrößen für den einen sich durch dieselben mathematischen Funktionen von $x'_1\,x'_2\,x'_3$, t' darstellen, die in den Argumenten $x_1\,x_2\,x_3$, t den andern Verlauf beschreiben. Es müssen also auch die Naturgesetze in dem einen System unabhängiger Raum-Zeit-Argumente genau die gleiche Form besitzen wie in dem andern. Freilich: die Tatsachen der Dynamik scheinen jener Forderung ins Gesicht zu schlagen, und unter dem Zwange dieser Tatsachen hat man sich seit Newton dazu entschließen müssen, nicht der Translation, wohl aber der Rotation eine absolute Bedeutung zuzuschreiben; doch hat die Vernunft dieses ihr durch die Wirklichkeit zugemutete Abstrusum niemals recht verdauen können (trotz aller philosophischen Rechtfertigungsversuche, vgl. z. B. Kants »Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften«), und das Problem der Zentrifugalkraft ist immer wieder als ungelöstes Rätsel empfunden worden[2]).

Indem wir aber die in Kap. II dargestellten Riemannschen Ideen, statt auf den dreidimensionalen Euklidischen Raum, auf die vierdimensionale Einstein-Minkowskische Welt, von welcher das vorige Kapitel handelte, anwenden, gelangen wir zu einer überraschenden Lösung, die wir gleichfalls dem Genie Einsteins verdanken. Die Weltpunkte, haben wir danach anzunehmen, bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, welcher durch eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform Q von einer positiven und drei negativen Dimensionen*) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Bei Benutzung irgendeines Koordinatensystems $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$ (im allgemeinen Riemannschen Sinne) sei

$$(1) \qquad Q = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Die Naturgesetze drücken sich jetzt als Tensorrelationen aus, die gegenüber beliebigen stetigen Transformationen der Argumente x_i invariant sind; dabei treten dann aber neben den übrigen physikalischen Zustandsgrößen die Koeffizienten g_{ik} der quadratischen Differentialform (1) auf. Der oben aufgestellten Relativitätsforderung wird demnach im Einklang mit den Erfahrungstatsachen Genüge geleistet, *wenn wir die* g_{ik} in genau der gleichen Weise wie etwa die Komponenten φ_i des elektromagnetischen Potentials (welche die Koeffizienten einer invarianten *linearen* Differentialform $\sum_i \varphi_i\, dx_i$ bilden) *als physikalische Zustandsgrößen betrachten, denen etwas Reales entspricht*, das »metrische Feld«. Es besteht unter diesen Umständen sogar Invarianz nicht bloß gegenüber den erwähnten Transformationen (II), die nur in bezug auf die Zeitkoordinate völlig willkürlichen (nicht-linearen) Charakter tragen, sondern gegenüber allen Transformationen überhaupt. Die Auszeichnung der Zeitkoordinate in (II) ist ja in der Tat mit den durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip gewonnenen Erkenntnissen unverträglich. Indem wir aber statt (II) ganz beliebige Transformationen zulassen, auch solche, die in den Raumkoordinaten nicht-linear sind, behaupten wir, daß die Cartesischen Koordinatensysteme an sich in keiner Weise vor irgendeinem »krummlinigen« Koordinatensystem ausgezeichnet sind. Damit *fällt die Existenz einer von der Physik unabhängigen Geometrie* im alten Sinne, und gerade weil wir uns von dem Dogma der Existenz einer solchen Geometrie noch nicht frei gemacht hatten, waren wir durch vernünftige Überlegung auf das Relativitätsprinzip (II) und nicht sofort auf das Prinzip der Invarianz gegenüber

*) Wir lassen gegenüber dem vorigen Kapitel die Änderung eintreten, daß wir die metrische Fundamentalform mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Die frühere Festsetzung war die bequemere zur Darstellung der Zerspaltung der Welt in Raum und Zeit, für die allgemeine Theorie erweist sich die gegenwärtige als die zweckmäßigere. Wir übernehmen die Zeichen φ_i, F_{ik}, p^i, s^i, T^{ik} ohne Vorzeichenänderung; dann hat aber z. B. p_i das entgegengesetzte Vorzeichen wie bisher.

beliebigen Transformationen der vier Weltkoordinaten gekommen. In Wahrheit beruht aber das räumliche Messen auf einem physikalischen Vorgang: der Reaktion der Lichtstrahlen und starren Maßstäbe auf die gesamte Körperwelt. Bereits in § 20 trat uns dieser Gesichtspunkt entgegen, vor allem aber können wir an die Ausführungen von § 12 anknüpfen; denn in der Tat sind wir hier zu Riemanns »dynamischer« Auffassung gelangt als einer notwendigen Konsequenz der Relativität aller Bewegung. Das Verhalten der Lichtstrahlen und Maßstäbe wird außer durch ihre eigene Beschaffenheit bestimmt durch das »metrische Feld«, genau so wie das Verhalten einer elektrischen Ladung außer von dieser selbst von dem elektrischen Feld abhängt. Wie aber das elektrische Feld seinerseits erzeugt wird von den Ladungen und durch seine Vermittlung also eine ponderomotorische Wechselwirkung der Ladungen aufeinander zustande kommt, müssen wir hier annehmen, daß *das metrische Feld* (oder, mathematisch gesprochen, der Tensor mit den Komponenten g_{ik}) *erzeugt wird durch das Materielle, welches die Welt erfüllt.* Die im vorigen Kapitel über die Weltmetrik gemachte, der Euklidischen Geometrie im dreidimensionalen Raum entsprechende Annahme, daß es spezielle Koordinatensysteme gibt, die »affinen«, in welchen die metrische Fundamentalform konstante Koeffizienten hat, ist dieser Auffassung gegenüber nicht mehr aufrecht zu erhalten.

Durch ein einfaches anschauliches Beispiel kann man sich klar machen, wie die geometrischen Verhältnisse durch Bewegung in Mitleidenschaft gezogen werden. Man versetze eine ebene Scheibe in gleichförmige Rotation. Ich behaupte, wenn in demjenigen Bezugsraum, relativ zu dem hier von gleichförmiger Rotation gesprochen wird, die Euklidische Geometrie gilt, sie auf der rotierenden Scheibe, wenn diese mittels mitbewegter Maßstäbe ausgemessen wird, nicht mehr gilt. Man betrachte nämlich einen um das Rotationszentrum beschriebenen Kreis auf der Scheibe. Sein Radius hat den gleichen Wert, ob ich ihn mittels ruhender oder mitbewegter Maßstäbe messe; denn die Bewegungsrichtung ist senkrecht zu der Längserstreckung des an den Radius angelegten Maßstabes. Hingegen ergibt sich für die Kreisperipherie mittels der mitbewegten Maßstäbe wegen der Lorentz-Kontraktion, welche sie erfahren, ein größerer Wert. Auf der rotierenden Scheibe gilt somit nicht mehr das Euklidische Gesetz, daß der Umfang des Kreises $= 2\pi$ mal dem Radius ist.

Wenn in einem Speisewagen, der durch eine scharfe Kurve fährt, die Gläser umfallen, oder ein in Rotation versetztes Schwungrad zerspringt, so haben wir darin nach der hier skizzierten Auffassung nicht, wie nach Newton, die Wirkung einer »absoluten Rotation« zu erblicken, die es nicht gibt, sondern des »metrischen Feldes«. Sofern der Zustand dieses Feldes, das etwas physikalisch Reales ist, nicht beharrt, sondern der gegenwärtige sich aus vergangenen unter dem Einfluß der in der Welt vorhandenen Massen, der Fixsterne, herausgebildet hat, ist jene Erschei-

nung also zum Teil eine Wirkung der Fixsterne, *relativ zu denen* die Rotation stattfindet*). —

Zur allgemeinen Relativitätstheorie, die wir jetzt aus der im vorigen Kapitel entwickelten »speziellen« mit Einstein herzuleiten im Begriffe sind, erheben wir uns am besten in zwei Stufen.

I. Wir vollziehen, dem Geiste der Kontinuität gemäß, den gleichen Übergang für die vierdimensionale Welt, der uns in Kap. II von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie führte. Dabei tritt eine quadratische Differentialform (1) als metrische Grundform auf. An Stelle der geraden Linie tritt die geodätische, deren Gleichung bei Benutzung eines geeigneten Parameters

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {hl \atop i} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0$$

lautet. Der Parameter ist dabei so gewählt, daß

$$g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = \text{konst.}$$

wird. Für die Weltlinie eines sich bewegenden Massenpunktes setzen wir voraus, daß der Ausdruck linker Hand positiv ist; wir können dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit die konst. rechts $= 1$ nehmen. s ist die Eigenzeit (deren infinitesimaler Zuwachs sich also aus

$$(3) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

bestimmt), $\frac{dx_i}{ds} = u^i$ die kontravarianten Komponenten der »Weltrichtung« des Massenpunktes. Die naturgemäße *Verallgemeinerung des Galileischen Trägheitsprinzips* wird die sein, daß sich ein Massenpunkt, der keiner Einwirkung von außen unterliegt, dem geodätischen Gesetz (2) gemäß bewegt. Aber nicht nur dieses Grundgesetz der Mechanik, sondern auch die physikalischen Gesetze, voran die Maxwellschen Grundgleichungen des veränderlichen elektromagnetischen Feldes gestatten eine unmittelbare Übertragung auf die jetzt vorausgesetzte allgemeine »Riemannsche« Weltgeometrie: wir brauchen nur in den Gesetzen des stationären Magnetfeldes, wie wir sie in Kap. II, § 15 formuliert haben, die Dimensionszahl von 3 auf 4 zu erhöhen, um dieses Ziel zu erreichen. Die so gewonnenen Gleichungen sind invariant gegenüber beliebigen Transformationen der vier Weltkoordinaten. Der in Kap. III behandelte, der Euklidischen

*) »Zum Teil« darum, weil die Massenverteilung in der Welt das metrische Feld nicht eindeutig bestimmt; sondern beide sind *in einem Moment* unabhängig voneinander und zufällig (genau wie Ladung und elektrisches Feld), die Naturgesetze lehren lediglich, wie sich aus einem solchen Anfangszustand beider alle übrigen (vergangenen und zukünftigen) Zustände zwangsläufig entwickeln. Daß die Welt, wie wir sie tatsächlich vorfinden, im Großen genommen, stationär (in Ruhe) ist, kann, wenn überhaupt, nur als statistisches Gleichgewicht verstanden werden. Vgl. darüber § 33.

Geometrie analoge Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß der zu der quadratischen Form (1) gehörige Riemannsche Krümmungstensor $R_{ij,hk}$ (s. § 16) mit allen seinen Komponenten verschwindet.

Halten wir noch an der Vorstellung einer kontinuierlich ausgebreiteten Materie als einer ursprünglich gegebenen Substanz fest und bedeutet wie früher μ_0 den Skalar der »Ruh-Massendichte«, so können wir die Gleichungen (2) in der Form schreiben

$$\mu_0 \frac{du^i}{ds} = -\mu_0 \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} u^h u^l .$$

Sie gelten, wenn jede Materiestelle sich unbeeinflußt von den übrigen und von äußeren Kräften bewegt; andernfalls treten auf der rechten Seite die Komponenten $\bar{p}^i$ der Dichte der wirkenden Viererkraft hinzu. Es findet Übereinstimmung mit den in § 23 aufgestellten mechanischen Grundgleichungen statt, wenn wir die Größen

$$p^i = -\mu_0 \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} u^h u^l \tag{4}$$

als Komponenten der Dichte einer »scheinbaren« Viererkraft einführen, die zu der wirklichen hinzutritt. Die einfachsten Beispiele solcher »Scheinkräfte« sind die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft. Vergleichen wir die Formel (4) für die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft« mit der für die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes*)

$$p^i = -F^i_k s^k ,$$

so zeigt sich eine vollständige Analogie. Wie nämlich der Vektor mit den kontravarianten Komponenten s^i die Elektrizität charakterisiert, so wird, wie wir gesehen haben, die sich bewegende Materie durch den Tensor mit den kontravarianten Komponenten $T^{ik} = \mu_0 u^i u^k$ beschrieben. Den Komponenten F^i_k des elektrischen Feldes entsprechen hier als Komponenten des metrischen Feldes die Größen

$$\Gamma^i_{hl} = \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} .$$

Wie die Feldkomponenten F durch Differentiation aus dem elektromagnetischen Potential φ_i entspringen, so die Γ aus den g_{ik}; diese bilden somit das Potential des metrischen Feldes. Die Kraftdichte ist das Produkt aus elektrischem Feld und Elektrizität auf der einen Seite, aus metrischem Feld und Materie auf der andern Seite:

$$p^i = -F^i_k s^k , \quad \text{bzw.} \quad p^i = -\Gamma^i_{rs} T^{rs} . \text{ —}$$

Verlassen wir die Vorstellung einer unabhängig von den physikalischen Zuständen existierenden Materie, so tritt an deren Stelle der durch den

*) Änderung des Vorzeichens wegen der Änderung des Vorzeichens der metrischen Grundform!

Zustand des Feldes bestimmte allgemeine Energie-Impuls-Tensor T_{ik}. Nach der speziellen Relativitätstheorie genügt dieser dem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 .$$

Diese Gleichung ist jetzt nach Formel (IV_2) des § 15 zu ersetzen durch die allgemein invariante

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, T^{ik})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r\, s \\ i \end{Bmatrix} T^{rs} = 0,$$

in der $-g$ die Determinante der g_{ik} ist. Würde auf der linken Seite nur das erste Glied stehen, so würde auch jetzt der Tensor T den Erhaltungsgesetzen genügen. Statt dessen kommt aber ein zweiter Term hinzu: die »reale« Gesamtkraft

$$\bar{p}^i = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, T^{ik})}{\partial x_k}$$

verschwindet nicht, sondern ihr muß durch die aus dem metrischen Felde entspringende »Scheinkraft«

$$p^i = -\Gamma^i_{rs}\, T^{rs}$$

das Gleichgewicht gehalten werden.

Diese Formeln erweisen sich auch in der speziellen Relativitätstheorie als zweckmäßig, wenn man sich auf ein krummliniges oder krummlinig bewegtes oder beschleunigtes Koordinatensystem zu beziehen hat. Um den schlichten Sinn unserer Ausführungen deutlich zu machen, wollen wir auf diesem Wege die *Zentrifugalkraft* bestimmen, die in einem rotierenden Bezugssystem auftritt. Verwenden wir ein normales Koordinatensystem für die Welt: t, x_1, x_2, x_3, führen aber an Stelle der Cartesischen Raumkoordinaten Zylinderkoordinaten r, z, θ ein, so ist

$$ds^2 = dt^2 - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Wir machen, unter ω eine konstante Winkelgeschwindigkeit verstanden, die Substitution

$$\theta = \theta' + \omega t', \qquad t = t'$$

und lassen hernach die Akzente wieder fort; dann kommt

$$ds^2 = dt^2 (1 - r^2 \omega^2) - 2 r^2 \omega\, d\theta\, dt - (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Setzen wir einen Augenblick

$$t = x_0, \qquad \theta = x_1, \qquad z = x_2,\ r = x_3,$$

so ist für einen in dem jetzt benutzten Bezugssystem ruhenden Massenpunkt $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ und daher

$$(u^0)^2 (1 - r^2 \omega^2) = 1 .$$

Um die Komponenten p^i der auf einen solchen Punkt wirkenden Zentrifugalkraft zu bestimmen, haben wir daher nur die Dreiindizes-Symbole $\begin{bmatrix} 0\,0 \\ i \end{bmatrix}$ zu bestimmen. Für $i = 0, 1, 2$ sind sie $= 0$; für $i = 3$ kommt

$$\begin{bmatrix} 0\,0 \\ 3 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial(1 - r^2\omega^2)}{\partial r} = r\omega^2 .$$

Es ist demnach $p_0 = p_1 = p_2 = 0$ und

$$p_3 = -\mu_0 \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 3 \end{bmatrix} (u^0)^2 = -\frac{\mu_0 r\omega^2}{1 - (r\omega)^2};$$

oder wenn wir zu den gewöhnlichen Maßeinheiten zurückkehren, in denen die Lichtgeschwindigkeit c nicht $= 1$ ist, die kontravarianten Komponenten benutzen und statt der Indizes $0, 1, 2, 3$ die bezeichnenderen t, θ, z, r:

$$p^t = p^\theta = p^z = 0, \qquad p^r = \frac{\mu_0 r\omega^2}{1 - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}.$$

Zwei eng miteinander zusammenhängende Umstände sind für die »Scheinkräfte« des metrischen Feldes charakteristisch. *Erstens*: die Beschleunigung, welche sie einem an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle befindlichen (genauer: diese Stelle mit bestimmter Geschwindigkeit passierenden) Massenpunkt erteilen, ist unabhängig von dessen Masse — oder die Kraft selber ist der trägen Masse des Massenpunktes, an welcher sie angreift, proportional. *Zweitens*: bei Benutzung eines geeigneten, nämlich eines geodätischen Koordinatensystems an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle verschwinden jene Kräfte vollständig (vgl. § 14). Gilt die spezielle Relativitätstheorie, so kann dieses Verschwinden simultan für alle Raum-Zeit-Punkte durch Einführung eines affinen Koordinatensystems erreicht werden, aber auch im allgemeinen Falle können wenigstens für jede einzelne Stelle durch ein zu dieser Stelle gehöriges geeignetes Koordinatensystem die sämtlichen 40 Komponenten Γ^i_{hl} des metrischen Feldes zum Verschwinden gebracht werden*).

Die erwähnten beiden Umstände treffen nun aber erfahrungsgemäß zu für die *Gravitationskraft.* Darin, daß ein gegebenes Gravitationsfeld jeder Masse, die man in das Feld bringt, die gleiche Beschleunigung erteilt, liegt ja gerade das eigentliche Rätsel der Schwerkraft. Im elektrostatischen Felde wirkt auf ein schwach geladenes Probekörperchen die Kraft $e \cdot \mathfrak{E}$, wo die elektrische Ladung e nur vom Propekörper, die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ nur vom Felde abhängt. Wirken keine weiteren Kräfte, so erteilt diese Kraft dem Probekörper von der trägen Masse m eine Be-

*) Diese Tatsache zeigt ohne weiteres, daß die Γ^i_{hl} nicht die Komponenten eines invarianten Tensors sein können. Es liegt demnach im Wesen des metrischen Feldes, daß es nicht durch einen gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Feldtensor Γ beschrieben werden kann. (Wohl aber haben die Γ^i_{hl} Tensorcharakter gegenüber linearen Transformationen.)

schleunigung $\mathfrak{b}$, welche sich durch die Grundgleichung der Mechanik $m\mathfrak{b} = e\mathfrak{E}$ bestimmt. Im Gravitationsfeld gilt etwas ganz Analoges. Die am Probekörper angreifende Kraft ist $= g\mathfrak{G}$, wo g, die »Gravitationsladung«, nur vom Probekörper, $\mathfrak{G}$ aber nur vom Felde abhängt; die Beschleunigung bestimmt sich auch hier durch die Gleichung $m\mathfrak{b} = g\mathfrak{G}$. Nun stellt sich aber die merkwürdige Tatsache heraus, daß die »Gravitationsladung« oder *»schwere Masse« g gleich der »trägen Masse« m* ist. Von Eötvös ist die empirische Geltung dieses Gesetzes in neuerer Zeit aufs genaueste geprüft worden [3]. Die einem Körper an der Erdoberfläche durch die Erddrehung erteilte Zentrifugalkraft ist der trägen, sein Gewicht der schweren Masse proportional. Die Resultierende aus beiden, die scheinbare Schwere, würde für verschiedene Körper verschiedene Richtung haben müssen, wenn nicht durchweg Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse besteht. Daß eine solche Richtungsverschiedenheit nicht stattfindet, konstatiert Eötvös an dem empfindlichsten Instrument, der Drehwage; es wird dadurch die träge Masse eines Körpers mit derselben Genauigkeit gemessen, mit der wir durch eine Präzisionswage sein Gewicht bestimmen. — Die träge Masse eines Körpers hat nach dem Grundgesetz der Mechanik *universelle* Bedeutung; sie regelt sein Verhalten gegenüber allen auf ihn stattfindenden Kraftwirkungen, welchen physikalischen Ursprungs sie auch sein mögen; seine schwere Masse ist aber nach der gewöhnlichen Auffassung (wie die elektrische Ladung) auf ein spezielles physikalisches Kraftfeld, das der Gravitation bezogen. Vom Standpunkt einer solchen Auffassung aus muß aber die Identität zwischen träger und schwerer Masse unverständlich bleiben; ihr kann nur eine Mechanik gerecht werden, die von vornherein neben der trägen Masse die Gravitation enthält. Das ist mit der Mechanik des allgemeinen Relativitätsprinzips der Fall, wenn wir annehmen, daß *die Gravitation genau so wie die Zentrifugal- oder Corioliskraft mit in jener »Scheinkraft« drin steckt, die dem metrischen Feld entspringt.* — Die Gravitationskräfte genügen erfahrungsgemäß auch der zweiten Forderung, daß sie an einer Raum-Zeit-Stelle durch Einführung eines geeigneten Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden können. Ein geschlossener Kasten, ein Lift, dessen Seil gerissen ist und der reibungslos im Schwerefeld der Erde abstürzt, ist ein anschauliches Beispiel eines solchen Bezugssystems. Alle frei fallenden Körper werden in diesem Kasten zu ruhen scheinen, die Vorgänge werden sich trotz der wirkenden Schwerkraft relativ zu dem Kasten genau so abspielen, als wenn der Kasten ruhte und kein Schwerefeld vorhanden wäre.

II. Der unter I. geschilderte Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie ist eine rein mathematische Angelegenheit. Unter Einführung der metrischen Grundform (1) können wir die Naturgesetze so formulieren, daß sie invariant sind gegenüber beliebigen Transformationen; das ist eine mathematische Wesensmöglichkeit, es liegt darin gar keine besondere Eigentümlichkeit dieser Gesetze. Ein neues physikalisches Moment kommt erst durch die Annahme hinein, die Weltmetri

sei nicht a priori fest gegeben, sondern jene quadratische Grundform werde durch die Materie nach allgemein invarianten Gesetzen bestimmt. Erst dadurch erheben wir uns zu einer Theorie, die den Namen einer allgemeinen Relativitätstheorie wirklich verdient und nicht nur das mathematische Gewand einer solchen erborgt hat. Erst sie ermöglicht es, das Problem der Relativität der Bewegung zu lösen. Erst sie führt jene schon unter I. erwähnte Analogie zu Ende, nach der sich das metrische Feld zur Materie verhält wie das elektrische zur Elektrizität. Und nur wenn wir sie akzeptieren, ist die am Schluß des vorigen Absatzes angedeutete Theorie möglich, nach der die Gravitation eine Äußerungsweise des metrischen Feldes ist; denn wir wissen aus der Erfahrung, daß das Gravitationsfeld sich durch die Massenverteilung (nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz) bestimmt. Weniger in der Forderung der allgemeinen Invarianz, sondern in dieser Annahme erblicke ich daher den eigentlichen Kern der allgemeinen Relativitätstheorie. Stellen wir uns auf diesen Standpunkt, so sind wir nicht mehr berechtigt, die aus dem metrischen Feld entspringenden Kräfte als Scheinkräfte zu bezeichnen; sie haben dann eine genau so reale Bedeutung wie die ponderomotorischen Kräfte des elektromagnetischen Feldes. Diesem Umstande Rechnung tragend, wollen wir in Zukunft vom Gravitations- statt vom metrischen Felde sprechen. Auch Coriolis- und Zentrifugalkraft sind reale Kraftwirkungen, die von dem Gravitationsfeld auf die Materie ausgeübt werden. Während sich unter I. die mathematisch leicht zu lösende Aufgabe stellte, die bekannten Naturgesetze (wie die Maxwellschen Gleichungen) von dem speziellen Fall eines konstanten metrischen Fundamentaltensors auf den allgemeinen zu übertragen, haben wir zur Durchführung des jetzt entwickelten Gedankens *das invariante Gravitationsgesetz* zu ermitteln, *nach welchem die Materie die Komponenten* Γ^i_{hl} *des Gravitationsfeldes bestimmt* und das in der Einsteinschen Theorie an die Stelle des Newtonschen Attraktionsgesetzes tritt. Hierfür bieten uns die bekannten Feldgesetze keinen Anhaltspunkt. Trotzdem gelang es Einstein, dies Problem in zwingender Weise zu lösen und zu zeigen, daß sich der Ablauf der Planetenbewegungen aus dem gefundenen Gesetz ebensogut erklärt wie aus dem alten Newtonschen, ja daß sich die einzige, bisher nicht befriedigend erklärte Unstimmigkeit, welche das Planetensystem gegenüber der Newtonschen Theorie aufweist, ein Vorrücken des Merkur-Perihels um den Betrag von $43''$ pro Jahrhundert, quantitativ richtig aus seiner Gravitationstheorie ergibt.

So fällt uns durch diese Theorie, die eines der mächtigsten Zeugnisse für die Kraft spekulativen Denkens ist, mit der Lösung des Problems der Relativität aller Bewegung (einer Lösung, die allein imstande ist, unsere Vernunft zu befriedigen) zugleich die Lösung des Rätsels der Schwerkraft als eine reife Frucht mit in den Schoß[4]). Man sieht, wie bedeutsame Argumente hier, zu den in Kap. II besprochenen hinzutretend, dem Riemann-Einsteinschen Standpunkt der allgemeinen Relativität zum Durchbruch verhelfen. Auch darf man behaupten, daß erst dieser Stand-

punkt dem Umstande völlig gerecht wird, daß Raum und Zeit dem materialen Gehalt der Welt als *Formen* der Erscheinungen gegenübertreten: nur die physikalischen Zustandsgrößen können gemessen, d. h. aus materiellen Geschehnissen abgelesen werden, nicht aber die vier Weltkoordinaten, die vielmehr a priori in willkürlicher Weise den Weltpunkten zugeordnet werden, um die Darstellung der in der Welt ausgebreiteten Zustandsgrößen durch mathematische Funktionen (von vier unabhängigen Variablen) zu ermöglichen.

Während das Potential des elektromagnetischen Feldes von den Koeffizienten einer invarianten *linearen* Differentialform der Weltkoordinaten $\varphi_i dx_i$ gebildet wird, besteht das Potential des Gravitationsfeldes aus den Koeffizienten einer invarianten *quadratischen* Differentialform. In diese Erkenntnis von grundsätzlicher Bedeutung hat sich in dem Aufstieg, den wir hier vollzogen, allmählich der *Pythagoreische Lehrsatz* verwandelt. Sie kommt uns in der Tat nicht aus der Beobachtung der Gravitationserscheinungen im eigentlichen Sinne (Newton wurde den Beobachtungen durch Einführung eines einzigen Gravitationspotentials gerecht), sondern aus der Geometrie, den Erfahrungen des Messens. Die Einsteinsche Gravitationstheorie entspringt eben durch das Zusammentreten zweier Erkenntnisgebiete, die bis dahin in der historischen Entwicklung völlig getrennt verlaufen waren; wir könnten diese Synthese durch das Schema

$$\underbrace{\text{Pythagoras}\quad\text{Newton}}_{\text{Einstein}}$$

andeuten.

Um *die Werte der Größen g_{ik} aus unmittelbar beobachtbaren Tatsachen* zu entnehmen, genügt im Prinzip allein die Feststellung der Ankunft von Lichtsignalen; die kräftefrei sich bewegenden Massenpunkte, auf die wir uns in der speziellen Relativitätstheorie außerdem noch stützten, können wir hier ganz entbehren. Die Weltpunkte seien irgendwie auf Koordinaten x_i bezogen. Die durch einen Weltpunkt O hindurchgehenden geodätischen Linien

$$(6)\qquad \frac{d^2x_i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds}=0;\qquad g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=C=\text{konst.}$$

zerfallen in zwei Klassen, diejenigen mit *raumartiger* und die mit *zeitartiger* Richtung ($C < 0$ bzw. $C > 0$). Die letzteren erfüllen einen »Doppelkegel« mit Knotenpunkt in O, der von O aus in zwei einfache Kegel zerfällt, den in die Zukunft und den in die Vergangenheit geöffneten. Der erste enthält alle Weltpunkte, die zur *»aktiven Zukunft«* von O gehören, der andere alle Weltpunkte, welche die *»passive Vergangenheit«* von O ausmachen. Der begrenzende Kegelmantel wird von den geodätischen Nullinien ($C = 0$) gebildet; auf seiner »zukünftigen« Hälfte liegen alle Weltpunkte, in denen ein in O gegebenes Lichtsignal eintrifft, allgemeiner die strengen »Einsatzpunkte« einer jeden in O ausgelösten Wirkung. Die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

sind somit nicht bloß die Potentiale der Gravitations- und Zentrifugalwirkungen, sondern *bestimmen allgemein, welche Weltpunkte untereinander in Wirkungszusammenhang stehen.* Vielleicht ist deshalb der Name »Gravitationsfeld« für dasjenige Reale, was durch diese Form dargestellt wird, zu einseitig und würde besser durch »*Äther*« ersetzt; während dann das elektromagnetische Feld schlechtweg als Feld zu bezeichnen wäre. In der Tat spielt dieser »Äther« die gleiche Rolle wie der Äther der alten Lichttheorie und der »absolute Raum« der Newtonschen Mechanik; nur darf man nicht vergessen, daß er freilich ganz etwas anderes ist als ein substantieller Träger.

Hat O die Koordinaten $x_i = 0$, so lautet die Gleichung des »Lichtkegelmantels« in der unmittelbaren Umgebung von O bei Beschränkung auf die Glieder 2. Ordnung

$$\sum_{ik} g_{ik} x_i x_k = 0, \tag{7}$$

worin g_{ik} die Werte dieser Koeffizienten im Punkte O bedeuten. Indem wir also in den O unmittelbar benachbarten Punkten das Eintreffen des in O aufgegebenen Lichtsignals beobachten, ermitteln wir das Verhältnis der g_{ik} an der Stelle O. Denken wir uns das für jeden Punkt O ausgeführt, so sind dadurch die g_{ik} überall so weit festgelegt, daß, wenn g_{ik} und g^*_{ik} zwei den Beobachtungen genügende Wertverläufe dieser Koeffizienten sind,

$$g^*_{ik} = \lambda g_{ik} \tag{8}$$

ist, wo λ eine willkürliche Raum-Zeit-Funktion. Wenn wir aber die Annäherung einen Schritt weiter treiben und auch die Glieder 3. Ordnung berücksichtigen, so erhalten wir aus (6) und $C = 0$ für den Kegelmantel die Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} x_i x_k + \sum_{ihl} \begin{bmatrix} h\,l \\ i \end{bmatrix} x_i x_h x_l = 0. \tag{9}$$

Indem wir also in der unmittelbaren Umgebung von O die Lichtausbreitung so genau verfolgen, daß wir auch noch die Abweichung von der durch (7) dargestellten »kugelförmigen« in erster Annäherung ermitteln, erhalten wir die Ausdrücke g_{ik} und

$$\begin{bmatrix} h\,l \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l\,i \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\,i \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_h} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x_l}\right\}$$

bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor. Das ergibt für zwei diesen Messungen Genüge leistende Wertsysteme g_{ik}, g^*_{ik} außer (8) noch die Bedingungen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} g_{hl} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_h} g_{li} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} g_{ih} = 0.$$

Aus diesen aber folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0, \qquad \lambda = \text{konst.}$$

Da die Gleichungen invariante Form besitzen, können wir, um das zu beweisen, annehmen, daß die g_{ik} für verschiedene Indizes i, k gleich 0, für gleiche Indizes $\neq 0$ sind; dann übersieht man ohne weiteres, daß die behauptete Konsequenz eintritt. Der willkürlich bleibende konstante Proportionalitätsfaktor kann nur durch individuelle Wahl einer Maßeinheit festgelegt werden.

§ 27. Der Energie-Impuls-Tensor.

Ebenso leicht, wie nach einer Bemerkung des vorigen Paragraphen die Maxwellsche, kann die Miesche Elektrodynamik von den Voraussetzungen der speziellen auf die der allgemeinen Relativitätstheorie übertragen werden. Dies ist von Hilbert durchgeführt worden [5]. In die Weltfunktion L gehen außer den Komponenten φ_i des elektromagnetischen Potentials und den Komponenten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

des Feldes noch die g_{ik} oder g^{ik} ein, aber nur diese Größen selber, nicht ihre Ableitungen. Man vergleiche die auf S. 168 aufgezählten vier einfachsten Invarianten, aus denen sich alle andern zusammensetzen: diese sind nicht nur gegenüber linearen, sondern beliebigen Transformationen invariant. Wir setzen, indem wir auch die g^{ik} variieren,

$$\delta L = S_{ik} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} + 2 s^i \delta \varphi_i, \tag{10}$$

wo $S_{ik} = S_{ki}$ die Komponenten eines Linientensors 2. Stufe bilden. Dieser, behaupten wir, hängt aufs engste mit dem Energie-Impuls-Tensor zusammen. Indem wir nämlich ausdrücken, daß L gegenüber einer infinitesimalen Koordinatentransformation invariant ist, erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den S_{ik} einerseits, dem elektrischen Potential und Feld anderseits:

$$S_i^k = F_{ir} H^{kr} + \varphi_i s^k. \tag{11}$$

Führen wir den Integranden des Wirkungsprinzips $\mathfrak{L} = L\sqrt{g}$ ein, so ist also auf Grund der Gleichungen Kap. II, (39) und Kap. III, (64):

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \delta \mathfrak{L} = - T_{ik} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} + 2 s^i \delta \varphi_i. \tag{12}$$

Für das erste Glied rechts gilt übrigens

$$- T_{ik} \delta g^{ik} = T^{ik} \delta g_{ik}.$$

Um das zu zeigen, hat man sich auf die aus

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 \ (i = k) \\ 0 \ (i \neq k) \end{cases}$$

folgende Beziehung

$$g_{ij} \delta g^{jk} = - g^{jk} \delta g_{ij}$$

zu stützen.

Beweis von (11). Es sei zunächst

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$$

eine beliebige Koordinatentransformation. Es gelten für die Komponenten im ungestrichenen und gestrichenen Koordinatensystem die Gleichungen

$$\varphi_i = \bar{\varphi}_\alpha \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i},$$

$$F_{ik} = \bar{F}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_k},$$

$$\bar{g}^{ik} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_\beta}.$$

Betrachten wir insbesondere eine infinitesimale Transformation

(13) $$\bar{x}_i = x_i + \delta x_i, \qquad \delta x_i = \varepsilon \cdot \xi_i(x_0\, x_1\, x_2\, x_3),$$

in welcher wir den infinitesimalen Parameter ε gegen 0 konvergieren lassen, so folgt daraus

$$\delta \varphi_i = -\varepsilon \cdot \varphi_\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i},$$

$$\delta F_{ik} = -\varepsilon \left(F_{\alpha k} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} + F_{i\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_k} \right),$$

(14) $$\delta g^{ik} = \varepsilon \left(g^{\alpha k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha} + g^{i\beta} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_\beta} \right).$$

Dabei bedeutet $\delta\varphi_i$ z. B. das erste Glied der Entwicklung von $\bar{\varphi}_i(\bar{x}) - \varphi_i(x)$ nach Potenzen von ε. Bilden wir für diese Variation δL nach (10), so kommt

$$\delta L = 2\, \varepsilon \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} (S_{ji} g^{kj} - F_{ir} H^{kr} - \varphi_i s^k).$$

Da wegen der Invarianz von L die Änderung dieser Größe bei einer Koordinatentransformation $= 0$ sein muß, ergibt sich die Behauptung. — Damit ist zugleich der in § 25 noch nicht erbrachte Beweis der Symmetrie des Energietensors T_{ik} in der Mieschen Theorie nachgeholt.

Erst hier erkennen wir, in welcher Weise jener Tensor mit der Hamiltonschen Funktion zusammenhängt. *Unsere Formel (12) lehrt lediglich, daß die durch den Tensor* T_{ik} *zu charakterisierende Materie in dem gleichen Verhältnis zum Gravitationsfeld* (mit den Potentialen g_{ik}) *steht wie die Elektrizität* (der Vektor s_i) *zum elektrischen Feld* (mit den Potentialen φ_i); das befindet sich in völligem Einklang mit den Ausführungen des vorigen Paragraphen. Vernünftigerweise haben wir anzunehmen, daß dieser Zusammenhang allgemeine Geltung hat und nicht auf die Miesche Elektrodynamik beschränkt ist. Er besteht in folgendem. Die Hamiltonsche Funktion hängt außer von gewissen Zustandsgrößen φ und deren Ableitungen (1., vielleicht auch höherer Ordnung) ab von den g_{ik}. Bezeichnet δ das totale Differential und δ_0 jenes partielle Differential, das

infinitesimaler Variation der Zustandsgrößen φ und ihrer Ableitungen bei ungeänderten g_{ik} entspricht, so ist

$$\delta\mathfrak{L} = \mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik} + \delta_0\mathfrak{L} = -\mathfrak{T}_{ik}\delta g^{ik} + \delta_0\mathfrak{L} \tag{15}$$
$$(\mathfrak{L} = L\sqrt{g}, \qquad \mathfrak{T}^{ik} = T^{ik}\sqrt{g}).$$

In dieser Gleichung erblicken wir die eigentliche *Definition* des Energie-Impuls-Tensors, welche die Symmetrieeigenschaft $T_{ik} = T_{ki}$ ohne weiteres mit sich führt. Das Gesetz, nach welchem jener Tensor von den Zustandsgrößen des Feldes und den g_{ik} abhängt, ist daraus *abzuleiten*, indem wie oben ausgedrückt wird, daß L eine Invariante gegenüber infinitesimalen Koordinatentransformationen ist. In dem besonderen Fall der Mieschen Theorie führt uns dieses Verfahren zu den Formeln Kap. III, (64) zurück, die wir jetzt aus tieferen Gründen begreifen. Erst in der allgemeinen Relativitätstheorie, welche die unabhängige Variation der g_{ik} ermöglicht, findet der Energie-Impuls-Tensor seine natürliche Erklärung.

Aus ihr ergeben sich auch auf begriffliche Weise, ohne Rechnung, die Erhaltungssätze für Energie und Impuls in voller Allgemeinheit[6]). Sie besagen nämlich lediglich, daß das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta_0 \int L\, d\omega = 0 \tag{16}$$

(die g_{ik} werden nicht mitvariiert, daher das Zeichen δ_0) insbesondere bei denjenigen unendlichkleinen Variationen erfüllt ist, welche eine infinitesimale Deformation der Welt dadurch hervorruft, daß die Zustandsgrößen von der Deformation mitgenommen werden. Wir fassen ein Weltgebiet $\mathfrak{G}$ ins Auge, dem bei der Darstellung durch die Koordinaten x_i ein gewisses mathematisches Gebiet $\mathfrak{X}$ im Bereich jener Variablen x_i entspricht. Nehmen wir weiter an, es habe die obige infinitesimale Transformation (13) die Eigenschaft, daß die Variationen ξ_i am Rande des Gebietes $\mathfrak{G}$ verschwinden, so entspricht dem Weltgebiet $\mathfrak{G}$ in den neuen Variablen $\bar{x}_i$ genau das gleiche mathematische Gebiet $\mathfrak{X}$. Zwei Weltpunkte, deren einer in den ursprünglichen Koordinaten durch $x_i = a_i$ gegeben ist, deren anderer dieselben überstrichenen Koordinaten $\bar{x}_i = a_i$ besitzt, gehen durch eine infinitesimale Deformation auseinander hervor, die an den Grenzen von $\mathfrak{G}$ verschwindet und daher das Gebiet $\mathfrak{G}$ als Ganzes ungeändert läßt. Während wir vorhin die Werte der Koeffizienten g^{ik} und $\bar{g}^{ik}$ im alten und neuen Koordinatensystem an *derselben* Stelle miteinander verglichen und ihren Unterschied δg^{ik} ermittelten, vergleichen wir jetzt den Wert von g^{ik} an einer Stelle mit dem Wert von $\bar{g}^{ik}$ an der durch die Verschiebung aus ihr hervorgehenden Stelle, bilden also (unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε):

$$\delta^* g^{ik} = \bar{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \{\bar{g}^{ik}(\bar{x}) - g^{ik}(x)\} - \{\bar{g}^{ik}(\bar{x}) - \bar{g}^{ik}(x)\} \tag{17}$$
$$= \delta g^{ik} - \varepsilon \cdot \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha .$$

Die gleiche Bedeutung hat δ^* für alle übrigen Größen. Schreibe ich kurz dx für das Integrationselement $dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$, so ist

$$\int_{\mathfrak{G}} L\,d\omega = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\,dx$$

eine Invariante, daher

$$\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}(x)\,dx = \int_{\mathfrak{X}} \overline{\mathfrak{L}}(\overline{x})\,d\overline{x} = \int_{\mathfrak{X}} \overline{\mathfrak{L}}(x)\,dx\,;$$

(18)
$$\int_{\mathfrak{X}} \delta^*\mathfrak{L}\cdot dx = 0\,.$$

Es ist aber

(19)
$$\delta^*\mathfrak{L} = -\mathfrak{T}_{ik}\,\delta^* g^{ik} + \delta^*_0\mathfrak{L}\,.$$

Wenden wir das Hamiltonsche Prinzip auf die mit δ^* bezeichnete infinitesimale Variation an, so kommt

(20)
$$\delta^*_0 \int \mathfrak{L}\,dx = 0\,.$$

Dabei ist folgender Umstand von entscheidender Wichtigkeit (ich knüpfe der Einfachheit halber wieder an die Miesche Theorie an): Wie im ursprünglichen, so gelten auch im überstrichenen Koordinatensystem die Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_i(\overline{x})}{\partial \overline{x}_k} - \frac{\partial \overline{\varphi}_k(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i} = \overline{F}_{ik}(\overline{x})$$

(denn sie sind invariant), also, da es doch auf die Benennung der Variablen nicht ankommt,

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{\varphi}_k(x)}{\partial x_i} = \overline{F}_{ik}(x)\,.$$

Für die Variation δ^* (hingegen nicht für die oben mit δ bezeichnete) ist daher

$$\frac{\partial(\delta^*\varphi_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\delta^*\varphi_k)}{\partial x_i} = \delta^* F_{ik}\,;$$

dies ist wesentlich für die Gültigkeit von (20). Aus (19) und (20) folgt jetzt

$$\int \mathfrak{T}_{ik}\,\delta^* g^{ik}\,dx = 0\,,$$

und wenn wir aus (17) und (14) den Ausdruck für $\delta^* g^{ik}$ einsetzen,

$$\int \left\{ \mathfrak{T}_i^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}_{rs}\frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i}\xi_i \right\} dx = 0\,,$$

Formen wir den ersten Term durch partielle Integration um, so kommt

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i}\mathfrak{T}_{rs} \right\} \xi_i\,dx = 0\,,$$

und da diese Gleichung für willkürliche, an den Grenzen verschwindende Verrückungsfunktionen ξ_i gelten muß:

(21)
$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i}\mathfrak{T}_{rs} = 0\,.$$

Um zu erkennen, daß dies in der Tat die Erhaltungssätze für Energie und Impuls sind, müssen wir von der Relation Kap. II, (41) und der Symmetrie von T_{rs} Gebrauch machen; dann ergibt sich für die durch $\sqrt{g}$ dividierte linke Seite von (21) der Wert

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T_i^k)}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i\, r \\ s \end{matrix} \right\} T_s^r .$$

Wenn wir die aus dem Hamiltonschen Prinzip (16) sich ergebenden Gleichungen als die physikalischen Feldgesetze bezeichnen, so ist damit *allgemein bewiesen*, *daß das mechanische Grundgesetz der Erhaltung von Energie und Impuls eine mathematische Folge dieser Feldgesetze ist;* ein Resultat, das wir für die Miesche Theorie schon früher durch Rechnung gefunden hatten.

Es ist zu beachten, daß in dem Hamiltonschen Prinzip (16), so wie wir es bis jetzt aufgestellt haben, die g_{ik} noch eine Sonderrolle spielen, insofern sie nicht mitvariiert werden dürfen. Variation der g_{ik} wird uns im nächsten Paragraphen die Einsteinschen Gravitationsgesetze ergeben.

§ 28. Einsteins Grundgesetz der Gravitation.

In der Maxwell-Lorentzschen Theorie hängt das Feld F mit dem erzeugenden Strom s durch die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{ik})}{d x_k} = s^i$$

zusammen. Jetzt handelt es sich darum, das Analogon dieser Gleichungen für das Gravitationsfeld mit den Komponenten $\left\{ \begin{matrix} r\, s \\ i \end{matrix} \right\}$ zu ermitteln, das durch die materielle Verteilung T_{ik} erzeugt wird. Nach der Newtonschen Theorie wird der Zustand der Materie durch einen Skalar, die Massendichte μ, charakterisiert, und auch das Gravitationspotential ist ein Skalar Φ; es gilt die Poissonsche Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi k \mu \quad \text{(k die Gravitationskonstante).}$$

Nach der Relativitätstheorie läßt sich aber die Materie im strengen Sinne nur durch den Energietensor T_{ik} charakterisieren, und im Einklang damit besteht das Gravitationspotential aus den Komponenten g_{ik} eines Linientensors 2. Stufe. Wir werden zu erwarten haben, daß die Feldkomponenten $\left\{ \begin{matrix} r\, s \\ i \end{matrix} \right\}$ inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen, deren rechte Seiten die T_{ik} bilden; außerdem müssen diese Gleichungen allgemein invarianten Charakter tragen. Es handelt sich also darum, einen Linientensor 2. Stufe zu finden, der aus den $\left\{ \begin{matrix} r\, s \\ i \end{matrix} \right\}$ selbst und ihren 1. Differentialquotienten aufgebaut ist. Ein solcher ist der Riemannsche

Linientensor Krümmung, den wir in § 16 aufgestellt und mit R_{ik} bezeichnet haben; siehe namentlich Formel (50) daselbst. Die R_{ik} sind in den Differentialquotienten der Feldkomponenten $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ linear. Somit scheinen sich ganz zwangsläufig die Gravitationsgleichungen

$$R_{ik} = - 8\pi\varkappa \cdot T_{ik} \tag{22}$$

zu ergeben, in denen $8\pi\varkappa$ eine universelle Konstante bedeutet. Aus der Tatsache, daß gravitierende Massen sich anziehen und nicht abstoßen, werden wir hernach schließen, daß diese Konstante positiv sein muß. Nehmen wir dieses Resultat vorweg, so können wir sie durch rationelle Wahl der Maßeinheit für die Energie $= 1$ machen. In der Tat hat Einstein, nachdem einmal der Gedanke der allgemeinen Invarianz bei ihm zu vollständigem Durchbruch gekommen war, die Gravitationsgleichungen zunächst in dieser Form angesetzt[7]). Jedoch müssen sie noch eine leichte Modifikation erfahren, damit sie mit dem Erhaltungssatz von Energie und Impuls in Einklang kommen.

Wir knüpfen dazu an das Hamiltonsche Prinzip an. Es ist kein Zweifel, daß dieses die Gravitationsgesetze ergeben muß, wenn die g_{ik} variiert werden. Behalten wir aber die Hamiltonsche Funktion L des vorigen Paragraphen bei, so finden wir dadurch $T_{ik} = 0$. Damit Gesetze wie (22) zustande kommen, auf deren rechter Seite die T_{ik} stehen, auf deren linker Seite aber Ausdrücke auftreten, die durch Differentiation allein aus den g_{ik} gebildet sind, muß zu jener Hamiltonschen Funktion L ein Zusatzglied hinzutreten, das ausschließlich aus den g_{ik} entspringt. Die einfachste, ja sogar die einzige derartige Invariante, welche die Differentialquotienten der g_{ik} nur bis zur 2. Ordnung enthält, und zwar die Ableitungen 2. Ordnung linear, ist die skalare Krümmung

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Durch partielle Integration (s. weiter unten) verwandelt sich das über ein beliebiges Weltgebiet erstreckte Integral $\int R\, d\omega$ unter Fortlassung eines über die Gebietsgrenze zu erstreckenden Integrals in $\int H\, d\omega$, wo

$$H = g^{ik}\left(\left\{ {ik \atop r} \right\} \left\{ {rs \atop s} \right\} - \left\{ {is \atop r} \right\} \left\{ {kr \atop s} \right\} \right). \tag{23}$$

Diese Größe hängt nur von den Potentialen g^{ik} und den Feldkomponenten $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ der Gravitation ab und hat die Eigenschaft, daß sie zwar selbst keine Invariante ist, wohl aber

$$\delta \int H\, d\omega = \delta \int R\, d\omega$$

für alle diejenigen infinitesimalen Variationen δ des Gravitationsfeldes, die an den Grenzen des beliebigen Weltgebiets $\mathfrak{G}$ verschwinden. Die sogleich durchzuführende Rechnung ergibt für eine derartige Variation

$$\delta \int H\, d\omega = \int (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R)\, \delta g^{ik} \cdot d\omega.$$

Das Hamiltonsche Prinzip wird nun verlangen, daß *die Summe*

$$\int (L - H)\, d\omega$$

aus der Wirkung des »Feldes« $\int L\, d\omega$ *und der Wirkung des »Äthers«* $-\int H\, d\omega$ *für jedes Weltgebiet einen stationären Wert annimmt gegenüber Variationen des Feldes und des Äthers, die an den Grenzen des Gebiets verschwinden. Daher erhalten wir statt* (22) *die richtigen und endgültigen Gravitationsgleichungen*

$$(24) \qquad \boxed{R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = - T_{ik}}\,.$$

Die Maßeinheit der Energie ist in rationeller Weise gewählt, und wir haben, wie schon oben erwähnt, das aus der Erfahrung sich ergebende Resultat über das Vorzeichen der Gravitationskonstante vorweg genommen.

Diese Gleichungen stehen in vollständigem Einklang mit dem Energie-Impuls-Gesetz. Bezeichnen wir ihre linke Seite einen Augenblick mit R_{ik}, so ist nämlich der Erhaltungssatz für diesen Tensor

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\mathsf{R}_i^k)}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\ r \\ s \end{Bmatrix} \mathsf{R}_s^r = 0$$

eine mathematische Identität. Wir brauchen, um das einzusehen, die obige Überlegung, welche zu den Erhaltungssätzen für den Energietensor T_{ik} führte, nur statt auf L auf H anzuwenden; daß in H nicht bloß die g_{ik}, sondern auch deren Ableitungen auftreten, ist dabei gleichgültig. *Das mechanische Grundgesetz der Erhaltung von Energie und Impuls ist demnach ebensowohl eine mathematische Konsequenz der Gravitationsgleichungen* (24) *wie der physikalischen Feldgesetze*[8]).

An die Stelle der alten Einteilung in Geometrie, Mechanik und Physik tritt in der Einsteinschen Theorie die Gegenüberstellung von Feld und Äther. Die Mechanik aber ist sozusagen die Eliminante aus beiden; denn das Bestehen des Energie-Impuls-Satzes ist einerseits eine Folge der Feldgesetze, anderseits die notwendige Bedingung dafür, daß die Materie gemäß dem Gravitationsgesetz der Welt ihre Maßbestimmung aufprägen kann. In dem System der Feld- und Gravitationsgesetze sind daher vier überschüssige Gleichungen enthalten. In der Tat muß die allgemeine Lösung vier willkürliche Funktionen enthalten[9]), da die Gleichungen ja zufolge ihrer invarianten Natur das Koordinatensystem der x_i vollständig unbestimmt lassen und mithin durch willkürliche stetige Transformation dieser Koordinaten aus einer Lösung dieser Gleichungen immer wiederum Lösungen hervorgehen (die aber objektiv denselben Weltverlauf darstellen).

Bevor wir das Gravitationsgesetz (24) weiter diskutieren, mögen die für das Vorhergehende erforderlichen Rechnungen durchgeführt werden. Um durch partielle Integration die 2. Ableitungen der g_{ik} in dem Weltintegral des Riemannschen Krümmungsskalars R zu beseitigen, stützen wir uns auf die Beziehungen § 15, (40) und (41). In

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}\cdot g^{ik}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}\right)=g^{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)}{\partial x_k}$$

ist danach das letzte Glied

$$=-\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}g^{rs}=-\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}g^{ik},$$

anderseits in

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sqrt{g}\cdot g^{ik}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\right)=g^{ik}\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}.\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)}{\partial x_r}$$

der zweite Term rechts

$$=\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\left(-2g^{is}\begin{Bmatrix} s\,r \\ k \end{Bmatrix}+g^{ik}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\right)=g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}\right).$$

Somit ist bis auf ein über die Begrenzung sich erstreckendes Integral

$$\int g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\right)d\omega=2\int g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}\right)d\omega;$$

$$(d\omega=\sqrt{g}\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3)$$

daher, wie an erster Stelle behauptet,

$$\int R\,d\omega=\int H\,d\omega.$$

Für die Variation

$$\delta\int H\,d\omega=\int\delta\mathfrak{H}\,dx\qquad(\mathfrak{H}=H\sqrt{g})$$

finden wir

$$\delta\mathfrak{H}=\delta\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\right)\cdot\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}+\delta\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\right)\cdot\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\delta(\sqrt{g}g^{ik})$$
$$-2\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\delta\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}\delta(\sqrt{g}g^{ik}).$$

Das 4. Glied kann geschrieben werden

$$-\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\delta\left(\sqrt{g}g^{ik}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}+\sqrt{g}g^{rk}\begin{Bmatrix} k\,s \\ i \end{Bmatrix}\right)=-\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\delta\left(\sqrt{g}g^{is}\begin{Bmatrix} s\,r \\ k \end{Bmatrix}+\sqrt{g}g^{ks}\begin{Bmatrix} s\,r \\ i \end{Bmatrix}\right)$$

und vereinigt sich mit dem zweiten zu

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\delta\frac{\partial\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)}{\partial x_r};$$

das erste aber wird bei geeigneter Abänderung der Indizesbezeichnung

$$=-\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}\delta\frac{\partial\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)}{\partial x_k}.$$

Durch Vertauschung von Differentiation und Variation und nachfolgende partielle Integration ergibt sich daher

$$\delta\int H\,d\omega=\int\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\right)\cdot\delta\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)\cdot dx$$
$$=\int R_{ik}\,\delta\left(g^{ik}\sqrt{g}\right)dx=\int\left(R_{ik}-\tfrac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\,d\omega.$$

Multiplizieren wir (24) mit g^{ik} und addieren nach i und k, so kommt, wenn $g^{ik} T_{ik} = T$ gesetzt wird:

$$R - 2R = -R = -T.$$

Jene Gleichungen können daher auch in der Form geschrieben werden:

$$R_{ik} = -\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T\right). \qquad (25)$$

Lassen wir die Maßeinheit für die Energie beliebig, so tritt rechts ein konstanter Faktor $8\pi\varkappa$ hinzu. Man beachte in mathematischer Hinsicht, daß *die exakten Gravitationsgesetze nicht linear sind*; wenn auch linear in den Ableitungen der Feldkomponenten $\left\{ {rs \atop i} \right\}$, so doch nicht in diesen selbst. — Nach diesen Gleichungen *wirkt jede Art von Energie gravitierend;* nicht bloß die in den Elektronen und Atomen konzentrierte Energie, die Materie im engeren Sinne, sondern auch die diffuse Feldenergie.

Damit haben wir die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie entwickelt. Jetzt fragt es sich, ob die Erfahrung diese rein spekulativ gewonnene Theorie bestätigt, vor allem, ob die Planetenbewegung aus ihr ebensogut (oder noch besser) wie aus dem Newtonschen Attraktionsgesetz erklärt werden kann.

§ 29. Statisches Gravitationsfeld. Zusammenhang mit der Erfahrung.

Um den Zusammenhang mit den am Planetensystem gewonnenen Erfahrungen herzustellen, spezialisieren wir zunächst die Einsteinschen Gesetze auf den Fall des statischen Gravitationsfeldes[10]). Dieser ist dadurch charakterisiert, daß bei Benutzung geeigneter Koordinaten die Welt sich in Raum und Zeit zerspaltet, daß also für die metrische Grundform

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

gilt:

$$g_{00} = f^2; \quad g_{0i} = g_{i0} = 0; \quad g_{ik} = -\gamma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

und daß dabei die auftretenden Koeffizienten f, γ_{ik} nur von den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$, nicht von der Zeit $t = x_0$ abhängen. $d\sigma^2$ ist eine positiv-definite quadratische Differentialform, welche die Metrik des Raumes mit den Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ bestimmt; f ist offenbar die Lichtgeschwindigkeit. Das Maß t der Zeit ist (nach Wahl der Zeiteinheit) durch die aufgestellten Forderungen vollständig festgelegt, die Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ hingegen nur bis auf eine beliebige stetige Transformation dieser drei Koordinaten untereinander.

Bezeichnen wir die auf die ternäre Form $d\sigma^2$ bezüglichen Christoffelschen Dreiindizes-Symbole durch einen angehängten * und durchlaufen die Indexbuchstaben i, k, l bloß die Ziffern 1, 2, 3, so folgt aus der Definition leicht:

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}^* ;$$

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,i \\ k \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\begin{Bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f_i}{f}, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix} = f f^i .$$

Darin sind $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die kovarianten Komponenten des dreidimensionalen Gradienten, $f^i = \gamma^{ik} f_k$ die zugehörigen kontravarianten. Setzen wir ferner

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}^* f_r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}^* \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

(auch der Summationsbuchstabe r durchläuft nur die drei Ziffern 1, 2, 3) und

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial(\sqrt{\gamma} f^i)}{\partial x_i} = \Delta_2 f,$$

wo γ die Determinante der γ_{ik} ist, so erhalten wir zwischen den Komponenten R_{ik} und P_{ik} des verjüngten Krümmungstensors der Form ds^2, bzw. $d\sigma^2$ durch eine einfache Rechnung die Beziehungen:

$$R_{ik} = \mathsf{P}_{ik} + \frac{f_{ik}}{f};$$

$$R_{i0} = R_{0i} = 0;$$

$$R_{00} = -f \cdot \Delta_2 f.$$

Das statische Gravitationsfeld wird erzeugt von ruhender Materie; diese ist dadurch gekennzeichnet, daß der Energiestrom verschwindet:

$$T_{i0} = T_{0i} = 0$$

und T_{00} sowie die T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ unabhängig sind von der Zeit. Es ist

$$T = \sum_{i,k=0}^{3} g^{ik} T_{ik} = \frac{T_{00}}{f^2} - \mathsf{T}, \qquad \text{wo } \mathsf{T} = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma^{ik} T_{ik}.$$

Damit sind wir nun imstande, die Gravitationsgleichungen für das statische Feld hinzuschreiben. Es kommt uns hier nur auf die eine Gleichung an, welche dem Indexpaar 0 0 entspricht:

$$f \cdot \Delta_2 f = \tfrac{1}{2} T_{00} + \tfrac{1}{2} f^2 \mathsf{T}. \tag{26}$$

Für die eigentliche Materie ist allgemein, wenn man auf ihre atomistische Konstitution keine Rücksicht zu nehmen braucht,

$$T_{ik} = \mu_0 u_i u_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

(μ_0 = Ruhmassendichte, u_i kovariante Komponenten der Geschwindigkeit), insbesondere im Falle der Ruhe und des statischen Gravitationsfeldes ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$):

$$T_{00} = \mu_0 (u_0)^2, \qquad T_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Da allgemein

$$\sum_{i,k=0}^{3} g^{ik} u_i u_k = 1$$

ist, gilt hier

$$\frac{1}{f^2}(u_0)^2 = 1, \qquad T_{00} = \mu_0 f^2,$$

und (26) ergibt

$$\frac{\Delta_2 f}{f} = \frac{1}{2}\mu_0$$

oder unter Hinzufügung des konstanten Proportionalitätsfaktors $8\pi\varkappa$:

(27) $$\frac{\Delta_2 f}{f} = 4\pi\varkappa\mu_0 .$$

Nehmen wir jetzt an, daß ds^2 (bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$) unendlich wenig von

(28) $$c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

abweicht — was voraussetzt, daß die das Gravitationsfeld erzeugenden Massen unendlich schwach sind —, so ergibt sich, wenn wir

$$f = c + \frac{\Phi}{c}$$

setzen (Φ unendlich klein):

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 4\pi \mathrm{k}\mu_0 \qquad (\mathrm{k} = c^2\varkappa),$$

und Φ ist gleich dem Newtonschen Potential der mit der Dichte μ_0 verteilten Massen, wenn wir k mit der Newtonschen Gravitationskonstante identifizieren. Tatsächlich trifft die hier gemachte Annahme nach allen unsern geometrischen Erfahrungen innerhalb des Planetensystems mit großer Annäherung zu.

Da die Massen der Planeten gegenüber der felderzeugenden, als ruhend zu betrachtenden Sonnenmasse sehr klein sind, können wir jene wie »Probekörper«, die in das Gravitationsfeld der Sonne eingebettet sind, behandeln. Die Bewegung eines jeden von ihnen ist dann (von den gegenseitigen Störungen abgesehen) durch eine geodätische Weltlinie in diesem statischen Gravitationsfeld gegeben. Sie genügt als solche dem Variationsprinzip

$$\delta\int ds = 0,$$

wobei die Enden des betreffenden Weltlinienstücks fest bleiben. Im statischen Falle ergibt sich dafür

$$\delta\int\sqrt{f^2 - v^2}\,dt = 0,$$

wo

$$v^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}$$

das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dies ist ein Variationsprinzip von derselben Form wie das der klassischen Mechanik; als »Lagrangesche Funktion« tritt

$$L = \sqrt{f^2 - v^2}$$

auf. Machen wir die gleiche Annäherung wie soeben und bedenken noch, daß bei unendlich schwachem Gravitationsfeld auch die auftretenden Geschwindigkeiten unendlich klein (gegenüber c) sein werden, so ist

$$\sqrt{f^2 - v^2} = \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2} = c + \frac{1}{c}(\Phi - \tfrac{1}{2}v^2),$$

und da jetzt

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$$

gesetzt werden darf, ergibt sich

$$\delta\int\left\{\frac{1}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 - \Phi\right\}dt = 0;$$

d. h. der Planet von der Masse m bewegt sich nach den Gesetzen der klassischen Mechanik, wenn man annimmt, daß eine Kraft mit dem Potential $m\Phi$ auf ihn einwirkt. *Damit ist der vollständige Anschluß an die Newtonsche Theorie erreicht.* Für die Konstante $8\pi\varkappa$ ergibt sich aus dem bekannten numerischen Wert der Newtonschen Gravitationskonstante k der Zahlwert

$$8\pi\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{gr}^{-1}.$$

Die Abweichung der metrischen Fundamentalform von der »Euklidischen« (28) ist also immerhin so beträchtlich, daß sich die geodätischen Weltlinien in dem Maße, wie die Planetenbewegung es zeigt, von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung unterscheiden — obwohl die im Raume gültige, auf $d\sigma^2$ beruhende Geometrie in den Abmessungen des Planetensystems nur ganz unerheblich von der Euklidischen abweicht (die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck von diesen Abmessungen ist nur sehr wenig von 180° verschieden). Es liegt das vor allem daran, daß der Radius der Erdbahn etwa 8 Lichtminuten beträgt, die Dauer des Erdumlaufs hingegen ein ganzes Jahr! [11])

Wir wollen die exakte Theorie der Bewegung eines Massenpunktes und der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld noch etwas weiter verfolgen. Die geodätischen Weltlinien können nach § 17 durch die beiden Variationsprinzipe

$$(29)\qquad \delta\int\sqrt{F}\,ds = 0 \quad\text{oder}\quad \delta\int F\,ds = 0, \qquad F = g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds}$$

gekennzeichnet werden. Für die »Nullinien«, die der Bedingung $F = 0$ genügen und das Fortschreiten eines Lichtsignals angeben, kommt nur das zweite in Betracht. Die Variation muß so vorgenommen werden, daß

die Enden des betrachteten Weltlinienstücks ungeändert bleiben. Unterwerfen wir nur $x_0 = t$ einer Variation, so ist im statischen Fall

$$(30) \qquad \delta\int F\,ds = \left[2 f^2 \frac{dx_0}{ds}\,\delta x_0\right] - 2\int \frac{d}{ds}\left(f^2 \frac{dx_0}{ds}\right) dx_0\,ds.$$

Also gilt

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

Bleiben wir zunächst beim Fall des Lichtstrahls stehen, so können wir, indem wir die Maßeinheit des Parameters s geeignet wählen — bis au eine willkürliche Maßeinheit ist s durch das Variationsprinzip selbs normiert —, die rechts auftretende konst. $= 1$ machen. Nehmen wi jetzt die Variation allgemeiner so vor, daß wir die räumliche Bahnkurve des Strahles unter Festhaltung der Enden abändern, hinsichtlich der Zei aber die Nebenbedingung, daß für die Enden $\delta x_0 = 0$ sein soll, fallen lassen, so lautet das Prinzip, wie aus (30) hervorgeht,

$$\delta\int F\,ds = 2[\delta t] = 2\,\delta\int dt.$$

Wird die variierte Bahn insbesondere gleichfalls wie die ursprüngliche mi Lichtgeschwindigkeit durchlaufen, so gilt auch für die variierte Weltlinie

$$F = 0, \qquad d\sigma = f\,dt,$$

und wir erhalten dann

$$(31) \qquad \delta\int dt = \delta\int\frac{d\sigma}{f} = 0.$$

Durch diese Gleichung wird nur die räumliche Lage des Lichtstrahls festgelegt; sie ist nichts anderes als das *Fermatsche Prinzip der kürzeste Ankunft.* In der letzten Formulierung ist die Zeit ganz eliminiert; sie gilt für ein beliebiges Stück der Bahn des Lichtstrahls, wenn dieses im Raum irgendwie unter Festhaltung seiner Enden unendlich wenig verlagert wird.

Benutzt man für ein statisches Gravitationsfeld irgendwelche Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$, so kann man sich zur graphischen Darstellung eines Euklidischen Bildraums bedienen, indem man den Punkt mit den Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ durch einen Bildpunkt mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ zur Darstellung bringt. Trägt man in diesen Bildraum den Or zweier ruhender Sterne S_1, S_2 und eines ruhenden Beobachters B ein so ist der Winkel, unter welchem die Sterne dem Beobachter erscheinen nicht gleich dem Winkel der geraden Verbindungslinien BS_1, BS_2 sondern man muß B mit S_1, S_2 durch die aus (31) sich ergebende gekrümmten Linien kürzester Ankunft verbinden und den Winkel, de diese in B miteinander bilden, durch eine weitere Hülfskonstruktio vom Euklidischen Maß auf das durch die metrische Grundform $d\sigma$ bestimmte Riemannsche Maß [vgl. § 11, Formel (15)] transformieren. Di so bestimmten Winkel sind es, welche die anschaulich erfaßte Lage de Gestirne zueinander bestimmen, sie sind es, die an dem Teilkreis de

Beobachtungsinstrumentes abgelesen werden. Während B, S_1, S_2 unverrückt ihre Stelle im Raum behalten, kann dieser $\sphericalangle\, S_1 B S_2$ sich ändern, wenn große Massen in die Nähe des Strahlengangs gelangen. In dem erörterten Sinne ist die Behauptung zu verstehen, daß *durch das Gravitationsfeld die Lichtstrahlen gekrümmt werden*. Doch sind die Strahlen nicht, wie wir in § 12 zu vorläufiger Orientierung angenommen hatten, geodätische Linien in dem Raum mit der metrischen Grundform $d\sigma^2$, sie machen nicht das Integral $\int d\sigma$, sondern das Integral

$$\int \frac{d\sigma}{f}$$

zum Extremum. Die Krümmung der Lichtstrahlen findet insbesondere in dem Gravitationsfeld der Sonne statt. Legen wir der graphischen Darstellung die Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ zugrunde, auf welche sich die soeben hergeleitete, mit der Newtonschen identische Näherungstheorie bezieht, so ergibt die numerische Rechnung für einen unmittelbar an der Sonne vorübergehenden Lichtstrahl eine Ablenkung von $1{,}7''$. Zur empirischen Feststellung dieses Effektes war bei Gelegenheit einer über Rußland totalen Sonnenfinsternis (die Beobachtung des Sternorts von Fixsternen in unmittelbarer Nähe der Sonne ist ja nur bei verfinsterter Sonne möglich) im Sommer 1914 eine Expedition ausgerüstet; aber durch den Ausbruch des Krieges wurde das Unternehmen vereitelt.

Ein anderer, durch die Einsteinsche Gravitationstheorie geforderter optischer Effekt im statischen Feld, der unter günstigen Umständen vielleicht gerade noch der Beobachtung zugänglich ist, beruht auf dem an einer festen Raumstelle zwischen der kosmischen Zeit dt und der Eigenzeit ds bestehenden Zusammenhang

$$ds = f\,dt.$$

Sind zwei ruhende Natriumatome objektiv einander gleich, so muß der Vorgang in ihnen, der zu den optischen Wellen der D-Linie Anlaß gibt, in beiden die gleiche Frequenz, gemessen in *Eigenzeit*, besitzen. Zwischen den Frequenzen τ_1, τ_2 in kosmischer Zeit besteht daher, wenn f an den betreffenden Stellen, an denen sich die Atome befinden, die Werte f_1, f_2 hat, der Zusammenhang

$$f_1 \tau_1 = f_2 \tau_2; \qquad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Die von einem Atom ausgehenden Lichtwellen haben aber natürlich in dem ganzen Raum, in *kosmischer* Zeit gemessen, überall die gleiche Frequenz. Indem man also das Licht der Natrium-D-Linie, das von einem Stern großer Masse herkommt, mit dem von einer irdischen ausgesandten in demselben Spektroskop vergleicht, muß jene Linie gegenüber dieser eine kleine Verschiebung nach dem Rot hin zeigen, da f in der Nähe großer Massen einen etwas kleineren Wert besitzt als fern von ihnen. Die Größe der zu erwartenden Abweichung liegt an der Grenze des

Beobachtbaren; es kommt die Vermischung mit dem Dopplereffekt hinzu. Die bisherigen Experimente haben noch kein eindeutiges Resultat ergeben.

Eine dritte Möglichkeit der Kontrolle durch die Erfahrung ist diese. Nach Einstein ist die Newtonsche Planetentheorie nur eine erste Annäherung; es fragt sich, ob die Abweichungen der strengen Einsteinschen Theorie von dieser groß genug sind, um einen mit unsern heutigen Hilfsmitteln wahrnehmbaren Einfluß hervorzubringen. Offenbar werden in dieser Hinsicht die Chancen für den sonnennächsten Planeten, den Merkur, am günstigsten liegen. In der Tat hat Einstein [12]), indem er die Approximation einen Schritt weiter fortsetzte, und Schwarzschild [13]), indem er in aller Strenge das von einer ruhenden Masse erzeugte kugelsymmetrische Gravitationsfeld und die Bahnkurve eines Massenpunktes von unendlichkleiner Masse in diesem Felde bestimmte, gefunden, *daß die Bahnellipse des Merkur* (außer den von den übrigen Planeten hervorgebrachten Störungen) *in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung erfahren muß, welche pro Jahrhundert 43″ ausmacht.* Seit Leverrier ist ein Betrag genau von dieser Größe in den säkularen Störungen des Merkurperihels bekannt, der durch die Störungstheorie nicht erklärt werden konnte; es wurden die mannigfachsten Hypothesen ersonnen, um diese Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung zu beseitigen [14]). — Auf die von Schwarzschild angegebene strenge Lösung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

So ist denn der Perihelvorgang des Merkur bisher die einzige empirische Bestätigung der Einsteinschen Gravitationstheorie; es steht also mit ihrer experimentellen Prüfung zur Zeit noch erheblich schlechter als mit der speziellen Relativitätstheorie. So radikal die Umwälzung ist, welche die Gravitationstheorie für unsere Vorstellungen von Raum und Zeit bedeutet, so winzig sind die tatsächlichen Abweichungen, welche sie für die beobachtbaren Erscheinungen mit sich bringt. Aber jedenfalls liefert sie ebensoviel und (hinsichtlich des Merkur) noch etwas mehr als die Newtonsche Theorie. Ihre eigentliche Stütze findet sie aber weniger in der Erfahrung als in ihrer eigenen inneren Folgerichtigkeit, durch welche sie der klassischen Mechanik ganz erheblich überlegen ist, und darin, daß sie in einer die Vernunft aufs höchste befriedigenden Weise das Rätsel der Relativität der Bewegung und der Gravitation auf einen Schlag löst.

Nach der gleichen Methode wie für den Lichtstrahl können wir auch für die Bewegung eines Massenpunktes im statischen Gravitationsfeld ein nur die räumliche Bahnkurve betreffendes Minimalprinzip, das dem Fermatschen der kürzesten Ankunft entspricht, aufstellen. Ist der Parameter s die Eigenzeit, so wird

$$(32) \qquad F = 1, \quad \text{und} \quad f^2 \frac{dt}{ds} = \text{konst.} = \frac{1}{E}$$

ist das Energieintegral. Jetzt benutzen wir das erste der beiden Variationsprinzipe (29) und verallgemeinern es wie oben in der Weise, daß wir die

räumliche Bahnkurve unter Festhaltung ihrer Enden, $x_0 = t$ aber ganz beliebig variieren. Es lautet dann

$$\delta \int \sqrt{F}\, ds = \left[\frac{1}{E}\, \delta t\right] = \delta \int \frac{dt}{E}\,. \tag{33}$$

Um die Eigenzeit zu eliminieren, dividieren wir die erste der Gleichungen (32) durch die ins Quadrat erhobene zweite; es kommt

$$\frac{1}{f^4}\left\{f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right\} = E^2, \qquad d\sigma = f^2 \sqrt{U}\, dt, \tag{34}$$

wo

$$U = \frac{1}{f^2} - E^2.$$

(34) liefert das Geschwindigkeitsgesetz, nach welchem der Massenpunkt seine Bahn durchmißt. Variieren wir insbesondere so, daß auch die variierte Bahnkurve nach dem gleichen Gesetz mit der gleichen Konstante E durchlaufen wird, so folgt aus (33):

$$\delta \int \frac{dt}{E} = \delta \int \sqrt{f^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}\, dt = \delta \int E f^2\, dt, \quad \text{d. i.}$$

$$\delta \int f^2\, U dt = 0$$

oder schließlich, indem wir dt durch das räumliche Bogenelement $d\sigma$ ausdrücken und so die Zeit ganz eliminieren:

$$\delta \int \sqrt{U}\, d\sigma = 0. \tag{35}$$

Nachdem hieraus die Bahnkurve des Massenpunktes ermittelt ist, ergibt sich der zeitliche Ablauf der in dieser Bahnkurve vonstatten gehenden Bewegung aus (34):

$$dt = \frac{d\sigma}{f^2 \sqrt{U}}\,.$$

Für $E = 0$ kommen wir auf die Gesetze des Lichtstrahls zurück.

§ 30. Strenge Lösung des Einkörperproblems [15]).

Für ein statisches Gravitationsfeld ist

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - d\sigma^2,$$

wo $d\sigma^2$ eine positiv-definite quadratische Form der drei Raumvariablen $x_1\, x_2\, x_3$ ist; die Lichtgeschwindigkeit f hängt gleichfalls nur von diesen ab. Das Feld ist *kugelsymmetrisch*, wenn bei geeigneter Wahl der Raumkoordinaten f und $d\sigma^2$ invariant sind gegenüber linearer orthogonaler Transformation derselben. Damit dies der Fall ist, muß f eine Funktion der Entfernung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vom Zentrum sein, $d\sigma^2$ aber besitzt notwendig die Gestalt

$$\lambda\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l\,(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \tag{36}$$

worin λ und l gleichfalls Funktionen von r allein bedeuten. Ohne daß diese Normalform zerstört wird, kann man die Raumkoordinaten noch einer Transformation unterwerfen, die darin besteht, daß man x_1, x_2, x_3 ersetzt durch μx_1, μx_2, μx_3 mit einem Proportionalitätsfaktor μ, der eine willkürliche Funktion der Entfernung r ist. Indem man über ihn geeignet verfügt, kann man offenbar erreichen, daß $\lambda = 1$ wird; dies sei geschehen. Wir haben dann also mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen

$$\gamma_{ik} = -g_{ik} = \delta_i^k + l \cdot x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wir wollen jetzt dieses kugelsymmetrische Feld so bestimmen, daß es den homogenen Gravitationsgleichungen genügt, welche dort gelten, wo keine Materie vorhanden ist, d. h. wo der Energie-Impuls-Tensor T_{ik} verschwindet. Jene Gleichungen sind zusammengefaßt in dem Variationsprinzip

$$\delta \int H \, d\omega = 0 .$$

Das Gravitationsfeld, das wir finden, ist *das von ruhenden Massen erzeugte, die kugelsymmetrisch um ein Zentrum verteilt sind.* Bedeutet der Akzent Ableitung nach r, so bekommen wir

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} = l' \frac{x_\alpha}{r} x_i x_k + l\,(\delta^\alpha_i\, x_k + \delta^\alpha_k\, x_i)$$

und daher

$$-\begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} l' \, x_i x_k + l\, \delta_i^k\, x_\alpha \qquad (i, k, \alpha = 1, 2, 3,).$$

Da aus

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \gamma_{\alpha\beta}\, \xi_\beta ,$$

wie man sich durch Einsetzen überzeugt,

$$\xi_\alpha = \frac{1}{h^2} x_\alpha , \qquad h^2 = 1 + l r^2$$

folgt, ist mithin

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{x_\alpha}{r} \frac{l' x_i x_k + 2 l r \delta_i^k}{h^2} .$$

Es genügt, die Berechnung von H für den Punkt $x_1 = r$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durchzuführen. An dieser Stelle sind von den eben berechneten Dreiindizes-Symbolen

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{h'}{h}, \qquad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\,3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{lr}{h^2},$$

alle übrigen $= 0$. Von den 0 enthaltenden Dreiindizes-Symbolen sind nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{f'}{f}, \qquad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{ff'}{h^2},$$

alle andern $= 0$. Von den g_{ik} sind die in der Hauptdiagonale stehenden ($i = k$) gleich

$$f^2, \quad -h^2, \quad -1, \quad -1\,,$$

die seitlichen ($i \neq k$) sind 0; für die in der Hauptdiagonale stehenden g^{ik} findet man daher die Werte

$$\frac{1}{f^2}, \quad -\frac{1}{h^2}, \quad -1, \quad -1\,,$$

für die seitlichen 0. Die Definition (23) von H liefert daher hier:

$$H =$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{f^2} & \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) - 2\begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
-\frac{1}{h^2} & \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
-1 & \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) \\
-1 & \begin{Bmatrix} 3\,3 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right).
\end{array}$$

Die in der ersten und zweiten Zeile stehenden Glieder ergeben zusammen

$$\left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)\left(\frac{1}{f^2}\begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix} 1\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}\right);$$

in diesem Produkt ist aber der zweite Faktor $= 0$. Da

$$\sum_{i=0}^{3}\begin{Bmatrix} 1\,i \\ i \end{Bmatrix} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad (\Delta = \sqrt{g} = hf)\,,$$

ist die Summe der in der dritten und vierten Zeile stehenden Terme

$$= -\frac{2\,l r}{h^2}\cdot\frac{\Delta'}{\Delta}\,.$$

Erstrecken wir das Weltintegral von H nach der Zeit x_0 über ein festes Intervall, nach dem Raum über eine von zwei Kugelflächen begrenzte Schale, so lautet, da

$$d\omega = \Delta\, dx_0\, d\Omega\, r^2 dr \quad (d\Omega = \text{räumlicher Winkel})$$

ist, die zu lösende Variationsgleichung

$$\delta\int H\Delta r^2\,dr = 0\,;$$

also, wenn wir

$$-\frac{l r^3}{h^2} = -\frac{l r^3}{1 + l r^2} = \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r = w$$

setzen,

$$\delta\int w\Delta'\,dr = 0\,.$$

Darin dürfen wir Δ und w als die unabhängig zu variierenden Funktionen betrachten.

Indem wir w variieren, ergibt sich

$$\Delta' = 0\,, \qquad \Delta = \text{konst.}\,;$$

bei geeigneter Wahl der Maßeinheit der Zeit also

$$\Delta = hf = 1\,.$$

Partielle Integration liefert

$$\int w\Delta' dr = [w\Delta] - \int \Delta w' dr\,.$$

Daher kommt, wenn wir Δ variieren,

$$w' = 0\,, \qquad w = \text{konst.} = -2m\,.$$

Aus der Definition von w und $\Delta = 1$ folgt nunmehr

$$\boxed{f^2 = 1 - \frac{2m}{r}\,, \qquad h^2 = \frac{1}{f^2}}\,.$$

Unsere Aufgabe ist damit vollständig gelöst. Die Maßeinheit der Zeit ist so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit im gravitationslosen Raum $= 1$ ist. Bedeutet m_0 die felderzeugende Masse in gr, so ist die Konstante m von der Dimension einer Länge $= \varkappa m_0$; wir nennen sie den *Gravitationsradius der Masse*. Denn in unendlicher Entfernung weicht die ermittelte metrische Fundamentalform ds^2 unendlich wenig von

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

ab, und es muß daher nach der obigen Näherungsrechnung $f = 1 + \Phi$ sein, wo Φ das Newtonsche Potential der felderzeugenden Masse ist. Da f^2 nicht negativ werden kann, zeigt sich übrigens, daß bei Verwendung der hier eingeführten Koordinaten für das von Materie freie Raumgebiet überall $r > 2m$ sein muß. Weitere Aufklärung darüber gibt der in § 31 durchzuführende besondere Fall der Flüssigkeitskugel, wo wir das Gravitationsfeld auch innerhalb der Masse bestimmen werden. Die gefundene Lösung dürfen wir für das Schwerefeld der Sonne außerhalb derselben benutzen, wenn wir die Einwirkung der Planeten und der fernen Fixsterne vernachlässigen.

Die Bewegung eines Planeten (dessen Masse wir unendlichklein gegenüber der Sonnenmasse annehmen) wird durch eine geodätische Weltlinie dargestellt. Von deren vier Gleichungen

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} h\,l \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds} = 0$$

liefert die dem Index $i = 0$ entsprechende im statischen Gravitationsfeld, wie wir oben sahen, das Energieintegral

$$f^2 \frac{dx_0}{ds} = \text{konst.}$$

oder da

$$\left(f\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2:$$

$$f^2\left[1 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right] = \text{konst.}$$

Die den Indizes $i = 1, 2, 3$ entsprechenden Gleichungen liefern für ein kugelsymmetrisches Feld, wie die hingeschriebenen Werte der Dreiindizes-Symbole ohne weiteres erkennen lassen, die Proportion

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} : \frac{d^2 x_2}{ds^2} : \frac{d^2 x_3}{ds^2} = x_1 : x_2 : x_3$$

und daraus in bekannter Weise die drei Gleichungen, welche den Flächensatz enthalten:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots , \quad x_1 \frac{dx_2}{ds} - x_2 \frac{dx_1}{ds} = \text{konst.}$$

Gegenüber der Newtonschen Theorie besteht hinsichtlich dieses Satzes nur der Unterschied, daß nicht nach der kosmischen Zeit, sondern der Eigenzeit s des Planeten differentiiert werden muß. Wegen des Flächensatzes erfolgt die Bewegung in einer Ebene, die wir zur Koordinatenebene $x_3 = 0$ wählen können. Führen wir in ihr Polarkoordinaten ein:

$$x_1 = r \cos \varphi , \qquad x_2 = r \sin \varphi ,$$

so lautet das Flächenintegral

$$(37) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = b .$$

Für das Energieintegral aber kommt, da

$$dx_1^2 + dx_2^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 , \qquad x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = r dr ,$$
$$d\sigma^2 = (dr^2 + r^2 d\varphi^2) + l (r dr)^2 = h^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 \text{ ist:}$$

$$f^2 \left\{ 1 + h^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \right\} = \text{konst.}$$

Da $fh = 1$ ist, folgt durch Einsetzen des Wertes von f^2

$$(38) \qquad -\frac{2m}{r} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r(r - 2m)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -E = \text{konst.}$$

Diese Gleichung zeigt gegenüber der Energiegleichung in der Newtonschen Theorie nur den einen Unterschied, daß im letzten Gliede links der eine Faktor r durch $r - 2m$ ersetzt ist.

Die weitere Behandlung geschieht genau wie in der Newtonschen Theorie. Wir setzen $\frac{d\varphi}{ds}$ aus (37) in (38) ein:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{2m}{r} - E - \frac{b^2 (r - 2m)}{r^3} ,$$

oder statt r die reziproke Entfernung $\varrho = \frac{1}{r}$ benutzend,

$$\left(\frac{d\varrho}{\varrho^2 ds}\right)^2 = 2m\varrho - E - b^2 \varrho^2 (1 - 2m\varrho) .$$

Wollen wir die Planetenbahn ermitteln, so eliminieren wir die Eigenzeit, indem wir diese Gleichung durch die quadrierte Gleichung (37) dividieren:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{b^2} \varrho - \frac{E}{b^2} - \varrho^2 + 2m\varrho^3 .$$

In der Newtonschen Theorie fehlt das letzte Glied rechts. Für die numerischen Verhältnisse, die bei einem Planeten vorliegen, hat das Polynom 3. Grades in ϱ auf der rechten Seite drei positive Wurzeln $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2$ und ist also

$$= 2m(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2);$$

ϱ bewegt sich zwischen ϱ_1 und ϱ_2. Die Wurzel ϱ_0 ist sehr groß gegenüber den beiden andern. Wir setzen wie in der Newtonschen Theorie

$$\frac{1}{\varrho_1} = a(1 - e), \quad \frac{1}{\varrho_2} = a(1 + e)$$

und nennen a die halbe große Achse und e die Exzentrizität; dann ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2}{a(1 - e^2)}.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von ϱ^2 miteinander, so kommt

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{2m}.$$

φ drückt sich durch ϱ mittels eines elliptischen Integrals 1. Gattung aus, daher ist ϱ umgekehrt eine elliptische Funktion von φ. Die Bewegung hat genau den gleichen Typus wie die des sphärischen Pendels. Um einfache Näherungsformeln zu finden, machen wir die gleiche Substitution, wie sie zur Bestimmung der Keplerschen Bahnellipse in der Newtonschen Theorie benutzt wird:

$$\varrho - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cos\theta.$$

Dann ist

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2m\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\theta\right)}}.$$

Das Perihel ist charakterisiert durch die Werte $\theta = 0, 2\pi, \ldots$; der Zuwachs des Azimuts φ für einen vollen Umlauf von Perihel zu Perihel wird also durch das obige Integral, genommen in den Grenzen von 0 bis 2π, geliefert. Mit bei weitem ausreichender Genauigkeit ist er

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2m\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)}}.$$

Wir finden aber

$$\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = (\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2) - \tfrac{3}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{1}{2m} - \frac{3}{a(1 - e^2)}.$$

Infolgedessen ist jener Zuwachs

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6m}{a(1 - e^2)}}} \sim 2\pi\left\{1 + \frac{3m}{a(1 - e^2)}\right\}$$

und *das Vorrücken des Perihels pro Bahnumlauf*

$$= \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}.$$

m, der Gravitationsradius der Sonne, kann nach dem dritten Keplerschen Gesetz noch durch die Umlaufszeit T des Planeten und die halbe große Achse a ausgedrückt werden:

$$m = \frac{4\pi^2 a^3}{c^2 T^2}.$$

Einen mit den feinen astronomischen Beobachtungsmitteln sicher konstatierbaren Betrag erreicht dieses Vorrücken des Perihels nur für den sonnennächsten Planeten, den Merkur (s. oben).[16])

§ 31. Weitere strenge Lösungen des statischen Gravitationsproblems.

In einem Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ lautet die Gleichung einer Rotationsfläche, welche die x_3-Achse zur Drehachse hat,

$$x_3 = F(r), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

auf ihr ist also das Quadrat des Abstandes $d\sigma$ zweier unendlich benachbarter Punkte

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + (F'(r))^2 dr^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(\frac{F'(r)}{r}\right)^2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2.$$

Im kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeld ist auf einer durch das Zentrum gehenden Ebene ($x_3 = 0$)

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2,$$

wo

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} = \frac{2m}{r^2(r-2m)}.$$

Die beiden Formeln kommen zur Übereinstimmung, wenn man

$$F'(r) = \sqrt{\frac{2m}{r-2m}}, \qquad F(r) = \sqrt{8m(r-2m)}$$

setzt. *Die Geometrie in jener Ebene ist also die gleiche, wie sie im Euklidischen Raum auf dem einschaligen Rotationsparaboloid*

$$z = \sqrt{8m(r-2m)}$$

gilt.[17]) Die orthogonale Projektion des Paraboloids auf die $x_1 x_2$-Ebene bedeckt das Äußere des Kreises $r > 2m$ doppelt, das Innere hingegen überhaupt nicht. Bei natürlicher analytischer Fortsetzung haben wir unsere kugelsymmetrische Lösung des Gravitationsproblems also folgendermaßen zu interpretieren: Der wirkliche Raum ist in der Weise auf den Euklidischen Bildraum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ abgebildet, daß die Abbildung das Äußere der Kugel $r = 2m$ doppelt über-

zieht. Durch jene Kugel, auf welcher die Maßbestimmung singulär wird, ist der Raum in zwei Hälften geschieden, deren eine man als das Äußere, deren andere man als das Innere des »Massenpunktes« zu bezeichnen hätte, um dessen Feld es sich handelt. Masse befindet sich aber weder im Äußern noch im Innern, sondern nur auf der Oberfläche der singulären Kugel. Die volle Realisierung dieser Lösung würde voraussetzen, daß der Raum andere Zusammenhangsverhältnisse aufweist, als wir sie ihm gemeinhin zuschreiben; er müßte nämlich zweifach zusammenhängend sein, d. h. nicht nur *einen*, sondern *zwei* ins Unendliche hinausreichende Säume tragen. Auf die wichtige Frage des Raumzusammenhangs im ganzen, der Analysis situs, kommen wir hernach noch genauer zu sprechen. Bleibt man bei der Auffassung des einfach zusammenhängenden Raumes stehen, so kann von der eben gekennzeichneten Lösung in der Natur immer nur ein Stück realisiert sein.

Vielleicht werden die Verhältnisse noch übersichtlicher, wenn wir unter Wahrung der Kugelsymmetrie auf ein anderes Koordinatensystem transformieren. Wenn die neuen Koordinaten durch Akzente bezeichnet werden, so sollen die Transformationsformeln lauten

$$x_1' = \frac{r'}{r} x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r} x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r} x_3; \qquad r = \left(r' + \frac{m}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Lassen wir nach Ausführung der Transformation die Akzente wieder fort, so ergibt sich

$$(39) \qquad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

und für die Lichtgeschwindigkeit

$$f = \frac{r - \frac{m}{2}}{r + \frac{m}{2}}.$$

Während die vorhin benutzten Koordinaten aus dem allgemeinen Ansatz (36) durch die Spezialisierung $\lambda = 1$ hervorgingen, entsprechen die jetzt gewählten der Forderung $l = 0$. Deuten wir wiederum $x_1 x_2 x_3$ als Cartesische Koordinaten eines Euklidischen Bildraumes, so ist der wirkliche Raum auf den Bildraum *konform* (winkeltreu) abgebildet. Das lineare Vergrößerungsverhältnis ist

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2.$$

Die singuläre Kugel ist jetzt durch $r = \frac{m}{2}$ gegeben, das »Äußere« durch $r > \frac{m}{2}$, das Innere durch $r < \frac{m}{2}$. $d\sigma^2$ ist regulär für alle r, f wird nur für $r = \frac{m}{2}$ zu Null. Der Umfang des Kreises $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ in der Ebene $x_3 = 0$ beträgt

$$2\pi r\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2.$$

Durchläuft r abnehmend die Werte von $+\infty$ bis $\frac{m}{2}$, so nimmt diese Funktion monoton ab; sinkt aber r unter $\frac{m}{2}$, so beginnt sie wieder zuzunehmen, um schließlich im Limes für $r = 0$ von neuem dem Werte $+\infty$ zuzustreben. —

Eine *geladene Kugel* erzeugt außer dem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld auch ein ebensolches elektrostatisches Feld; da sich beide Felder gegenseitig beeinflussen, können sie nur simultan bestimmt werden. Verwenden wir wie für die übrigen Größen so für die Elektrizität die gewöhnlichen Maßeinheiten des *CGS*-Systems (und nicht die sonst hier zugrunde gelegten Heavisideschen, die über den Faktor 4π anders verfügen), so lautet in dem von Massen und Ladungen freien Gebiet das Integral, das für den Gleichgewichtszustand einen stationären Wert annimmt:

$$\int\left\{w\Delta' + \frac{\varkappa}{c^2}\frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta}\right\}dr.$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie oben, Φ ist das elektrostatische Potential. Als Wirkungsfunktion des elektrischen Feldes ist gemäß der klassischen Theorie das Quadrat des Feldbetrages zugrunde gelegt. Die Variation von w ergibt, ebenso wie im ladungslosen Fall,

$$\Delta' = 0\,, \qquad \Delta = \text{konst.} = 1\,,$$

Variation von Φ aber:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\Phi'}{\Delta}\right) = 0 \qquad \text{und daraus} \qquad \Phi = \frac{e_0}{r}.$$

Für das elektrostatische Potential erhält man demnach die gleiche Formel wie ohne Berücksichtigung der Gravitation; die Konstante e_0 ist die das Feld erzeugende elektrische Ladung. Variiert man endlich Δ, so kommt

$$-w' - \frac{\varkappa}{c^2}\frac{\Phi'^2 r^2}{\Delta^2} = 0$$

und daraus

$$w = -2m + \frac{\varkappa}{c^2}\frac{e_0^2}{r}\,, \qquad \frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2\varkappa m_0}{r} + \frac{\varkappa}{c^2}\frac{e_0^2}{r^2}.$$

In f^2 tritt, wie man sieht, außer dem von der Masse m_0 abhängigen Glied $-\frac{2\varkappa m_0}{r}$ noch ein *elektrisches Zusatzglied* auf. Wir nennen $\varkappa m_0 = m$ den Gravitationsradius der Masse m_0, $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}e_0 = e$ den *Gravitationsradius der Ladung* e_0. In Entfernungen r der Größenordnung m ist das Massenglied, in Entfernungen der Größenordnung e das elektrische Glied der 1 vergleichbar. f^2 bleibt für alle Werte von r positiv, wenn $e > m$ ist;

unter diesen Umständen können also Masse und Ladung auf einen Punkt zusammengedrängt sein. *Für ein Elektron ist der Quotient* $\frac{e}{m}$ *von der Größenordnung* 10^{20}. Daß am Elektron eine derartige reine Zahl auftritt, die von ganz anderer Größenordnung als 1 ist, macht die in der Mieschen Theorie enthaltene These, daß alle aus den Maßgrößen des Elektrons und der Atome bestimmten reinen Zahlen sich als mathematische Konstante aus den Naturgesetzen ergeben müssen, einigermaßen bedenklich; so schwer es uns freilich auf der andern Seite fällt, zu glauben, daß dem Weltbau gewisse reine Zahlen von zufälligem numerischen Wert zugrunde liegen. — In Entfernungen, die mit

$$a = \frac{e_0^2}{m_0 c^2}$$

vergleichbar sind, werden das Massenglied und das elektrische Glied im Gravitationspotential f von der gleichen Größenordnung; erst wenn r vielmal größer ist als a, gilt das Superpositionsprinzip in dem Sinne, daß das elektrostatische Potential in gewöhnlicher Weise durch die Ladung, das Gravitationspotential durch die Masse bestimmt ist. Demnach wird man a als Radius der Wirkungssphäre betrachten können; diese Größe tritt in jenen früher erwähnten Theorien, die auf Grund spezieller Ansätze den Energieinhalt des Elektrons ermitteln, als Elektronenradius auf. Es besteht das Verhältnis

$$a : e = e : m \quad \text{oder} \quad e = \sqrt{am}\,. \text{ —}$$

Das *im Innern massiver Körper* herrschende Gravitationsfeld ist nach der Einsteinschen Theorie erst bestimmt, wenn die dynamische Konstitution der Körper vollständig bekannt ist; in den Gravitationsgleichungen sind ja die mechanischen, also im statischen Fall die Gleichgewichtsbedingungen mit enthalten. Die einfachsten Verhältnisse, welche wir ins Auge fassen können, liegen vor, wenn die Körper aus einer *homogenen inkompressiblen Flüssigkeit* bestehen. Der Energietensor einer Flüssigkeit, auf welche keine Volumkräfte wirken, wird nach § 24 durch die Gleichungen geliefert

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k - p g_{ik}\,,$$

in denen die u_i die kovarianten Komponenten der Weltrichtung der Materie sind, der Skalar p den Druck bedeutet und μ^* sich aus der konstanten Dichte μ_0 durch die Gleichung $\mu^* = \mu_0 + p$ bestimmt. Wir führen die Größen

$$\mu^* u_i = v_i$$

als Unabhängige ein und setzen

$$\tfrac{1}{2} L = \mu_0 - \sqrt{v_i v^i}\,.$$

Dann ist, wenn wir nur die g^{ik} variieren, hingegen die v_i nicht:

$$\delta \mathfrak{L} = - \mathfrak{T}_{ik}\, \delta g^{ik} \qquad (\mathfrak{L} = L\sqrt{g}, \quad \mathfrak{T}_{ik} = T_{ik}\sqrt{g})\,.$$

Folglich können wir die Gravitationsgleichungen in die auf diese Art der Variation sich beziehende Formel zusammenfassen

$$\delta \int (L - H)\, d\omega = 0 .$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß dieses Prinzip, wenn in ihm die v_i als Unabhängige variiert werden, *nicht* die richtigen hydrodynamischen Gleichungen ergibt (denn es käme einfach $v_i = 0$). Diese, d. s. die Erhaltungssätze für Energie und Impuls, sind ja aber bereits in den Gravitationsgleichungen mitenthalten.

Im statischen Fall ist $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ und alle Größen sind unabhängig von der Zeit; wir setzen $v_0 = v$ und wenden das Variationszeichen δ^* in dem gleichen Sinne wie in § 27 an, wobei wir uns aber auf eine rein räumliche infinitesimale Verschiebung beschränken. Dann ist

$$\delta^* \mathfrak{L} = - \mathfrak{T}_{ik}\, \delta^* g^{ik} + h\, \delta^* v \qquad \left(h = \frac{\Delta}{f}\right),$$

wobei $\delta^* v$ nichts anderes bedeutet als den Unterschied von v an zwei Raumstellen, die durch die infinitesimale Verschiebung auseinander hervorgehen. Indem wir jetzt den Schluß, durch den wir in § 27 den Energie-Impuls-Satz gewannen, umkehren, folgern wir aus der Gültigkeit jenes Gesetzes, d. i.

$$\int \mathfrak{T}_{ik}\, \delta^* g^{ik} \cdot dx = 0$$

und der Gleichung

$$\int \delta^* \mathfrak{L} \cdot dx = 0 ,$$

daß $\delta^* v = 0$ ist. Und das bedeutet, daß v *in einem zusammenhängenden, von Flüssigkeit erfüllten Raumgebiet einen konstanten Wert besitzt.* Das Energiegesetz ist identisch erfüllt, und das Impulsgesetz drückt sich am einfachsten in dieser Tatsache aus.

Eine einzige im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsmasse wird hinsichtlich Massenverteilung und Feld Kugelsymmetrie besitzen. Spezialisieren wir auf diesen Fall, so haben wir für ds^2 den gleichen, die drei unbekannten Funktionen λ, l, f enthaltenden Ansatz zu machen wie zu Beginn des § 30. Setzen wir von vornherein $\lambda = 1$, so entgeht uns diejenige Gleichung, welche durch Variation von λ entspringt. Für sie ist offenbar jene Gleichung ein voller Ersatz, welche die Invarianz der Wirkungsgröße bei infinitesimaler räumlicher Verschiebung in radialer Richtung aussagt, d. h. der Impulssatz $v =$ konst. Das zu lösende Variationsproblem lautet jetzt

$$\delta \int \{ \Delta' w - r^2 \mu_0 \Delta + r^2 v h \}\, dr = 0 ;$$

dabei sind Δ und h zu variieren,

$$w \text{ ist } = \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r .$$

Beginnen wir mit der Variation von Δ; es kommt

$$w' + \mu_0 r^2 = 0\,, \qquad w = -\frac{\mu_0}{3} r^3\,,$$

$$(40) \qquad \boxed{\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\mu_0}{3} r^2}\,.$$

Die Flüssigkeitskugel habe den Radius $r = r_0$. Wir sehen, daß er notwendig

$$< a = \sqrt{\frac{3}{\mu_0}}$$

bleiben muß. Dabei ist für Energie und Masse die aus der Gravitationstheorie sich ergebende rationelle Einheit zugrunde gelegt. Für eine Wasserkugel ist jene obere Grenze beispielsweise

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi\varkappa}} = 4 \cdot 10^8 \text{ km} = 22 \text{ Lichtminuten.}$$

Außerhalb der Kugel gelten unsere früheren Formeln, insbesondere ist dort

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r}\,, \qquad \Delta = 1\,.$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß h und f stetig über die Kugeloberfläche hinübergehen und der Druck p daselbst verschwindet. Aus der Stetigkeit von h ergibt sich zunächst für den Gravitationsradius m der Flüssigkeitskugel

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6}\,.$$

Die zwischen r_0 und μ_0 bestehende Ungleichung zeigt, daß der Radius r_0 größer sein muß als $2m$. Bevor wir also, aus dem Unendlichen kommend, an die zu Beginn dieses Paragraphen erwähnte singuläre Kugel $r = 2m$ gelangen, geraten wir in die Flüssigkeit hinein, und in ihr gelten andere Gesetze. Gehen wir zur Grammeinheit über, so ist μ_0 durch $8\pi\varkappa\mu_0$ zu ersetzen, und m ist $= \varkappa m_0$, wenn m_0 die gravitierende Masse bedeutet; dann findet sich

$$m_0 = \mu_0 \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3}\,.$$

Da

$$v = \mu^* f = \frac{\mu^* \Delta}{h}$$

eine Konstante ist und an der Kugeloberfläche den Wert $\frac{\mu_0}{h_0}$ annimmt, wo h_0 den aus (40) zu entnehmenden Wert von h daselbst bedeutet, so ist im ganzen Innern

$$(41) \qquad v = (\mu_0 + p) f = \frac{\mu_0}{h_0}\,.$$

Die Variation von h liefert

$$-\frac{2\Delta'}{h^3} + rv = 0.$$

Da aus (40)

$$\frac{h'}{h^3} = \frac{\mu_0}{3} r$$

folgt, findet man sofort

$$\Delta = \frac{3v}{2\mu_0} h + \text{konst.}$$

Zieht man noch den Wert (41) der Konstanten v heran und ermittelt den Wert der auftretenden Integrationskonstanten durch die Randbedingung $\Delta = 1$ auf der Kugeloberfläche, so kommt

$$\Delta = \frac{3h - h_0}{2h_0}, \qquad \boxed{f = \frac{3h - h_0}{2hh_0}}.$$

Endlich ergibt sich aus (41) jetzt

$$\boxed{p = \mu_0 \cdot \frac{h_0 - h}{3h - h_0}}.$$

Damit sind die metrische Fundamentalform des Raumes

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{a^2 - r^2},$$

das Gravitationspotential (oder die Lichtgeschwindigkeit, f) und das Druckfeld p bestimmt.

Die im Innern der Kugel herrschende Geometrie stimmt auf einer durch ihr Zentrum gehenden Ebene überein mit der Geometrie auf einer Rotationsfläche $z = F(r)$ im Euklidischen Raum. Es ist

$$F'^2 = \frac{r^2}{a^2 - r^2},$$

und daraus findet man ohne weiteres, daß jene Rotationsfläche eine Kugel vom Radius a ist. *Im ganzen Innern der Flüssigkeitskugel gilt die räumliche sphärische Geometrie, nämlich dieselbe wie auf der »Kugel«*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

im vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten x_i. Am elegantesten führt man diese Betrachtung vielleicht so durch. Der Winkel $d\varphi$, unter dem zwei unendlich benachbarte Punkte, p mit den Koordinaten x_i und p' mit den Koordinaten $x_i + dx_i$, in diesem vierdimensionalen Raum vom Nullpunkt O aus erscheinen, d. h. der Winkel der Strahlen Op und Op' bestimmt sich aus

42) $$\frac{\sum x_i^2 \cdot \sum dx_i^2 - \left(\sum x_i\,dx_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = d\varphi^2$$

(Summation über i von 1 bis 4). Sind P, P' die Durchstoßpunkte dieser Strahlen mit der Kugel um O vom Radius a und ist $d\sigma$ deren Abstand auf der Kugel, so ist $d\sigma = a\,d\varphi$. Wählen wir für p und p' die Punkte P und P' selber, so ist

$$\sum x_i^2 = a^2, \qquad \sum x_i\,dx_i = 0.$$

Benutzen wir als Gaußsche Koordinaten der Kugelpunkte die ersten drei Cartesischen $x_1 x_2 x_3$, so liefert (42) demnach

$$(43) \qquad d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{x_4^2},$$

wo

$$x_4^2 = a^2 - r^2, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ist. Das ist genau die gleiche Formel, welche wir hier für das Innere der Flüssigkeitskugel hergeleitet haben. Wählen wir aber für p und p' die in der Ebene $x_4 = a$ gelegenen Projektionspunkte der Kugelpunkte P, P', so kommt, da dann $dx_4 = 0$ ist:

$$(44) \qquad \frac{d\sigma^2}{a^2} = \frac{(a^2 + r^2)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - (x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{(a^2 + r^2)^2},$$

und das ist jene Gestalt der metrischen Fundamentalform des sphärischen Raumes, welche uns in Kap. II, § 11 begegnete. Der Übergang von (43) zu (44) wird durch die Koordinatentransformation bewirkt

$$x_1' = \frac{r'}{r} x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r} x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r} x_3; \qquad r' = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Diese Ergebnisse über die Flüssigkeitskugel sind zuerst von Schwarzschild gewonnen worden [18]. Nachdem die wichtigsten Fälle des kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeldes erledigt waren, gelang es dem Verfasser, das allgemeinere Problem des *rotations*-(zylinder-)*symmetrischen statischen Feldes* zu lösen [19]. Hier mögen nur die einfachsten Resultate dieser Untersuchung eine kurze Erwähnung finden. Es handle sich zunächst um *ungeladene Massen* und um das Gravitationsfeld in dem von Materie freien Raum. Aus den Gravitationsgleichungen ergibt sich dann daß unter Einführung gewisser Raumkoordinaten r, θ, z, der *kanonischen Zylinderkoordinaten*,

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = h(dr^2 + dz^2) + \frac{r^2 d\theta^2}{f^2}$$

wird. θ ist ein Winkel, der mod. 2π zu nehmen ist; d. h. Werten von θ, welche sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, entspricht derselbe Punkt. Auf der Rotationsachse wird $r = 0$. h und f sind Funktionen von r und z. Wir bilden den wirklichen Raum auf einen Euklidischen ab, in welchem r, θ, z Zylinderkoordinaten sind. Das kanonische Koordinatensystem ist eindeutig bestimmt bis auf eine Verschiebung in Richtung der Rotationsachse: $z' = z +$ konst. Wenn $h = f = 1$ ist, stimmt $d\sigma^2$ mit der metrischen Grundform des Euklidischen Bildraums

überein. Das Gravitationsproblem kann in ebenso einfacher Weise wie nach der Newtonschen Theorie gelöst werden, wenn die Massenverteilung im kanonischen Koordinatensystem bekannt ist. Überträgt man nämlich die Massen in unsern Bildraum, d. h. bringt in ihm eine solche Massenverteilung an, daß die in irgend einem Stück des wirklichen Raums enthaltene Masse gleich der Masse in dem korrespondierenden Stück des Bildraums ist, und ist dann ψ das Newtonsche Potential dieser Massenverteilung im Euklidischen Bildraum, so gilt die einfache Formel

$$f = e^{\psi/c^2}. \tag{45}$$

Auch die andere noch unbekannte Funktion h läßt sich durch Lösung einer gewöhnlichen Poissonschen Gleichung (in der Meridianebene $\theta = 0$) bestimmen. — Handelt es sich um *geladene Körper*, so existiert das kanonische Koordinatensystem gleichfalls. Nimmt man an, daß die Massen gegenüber den Ladungen zu vernachlässigen sind, d. h. daß für ein beliebig herausgegriffenes Raumstück der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen elektrischen Ladungen immer vielmal größer ist als der Gravitationsradius der in ihm enthaltenen Massen, und bedeutet φ das nach der klassischen Theorie berechnete elektrostatische Potential der in den kanonischen Bildraum übertragenen Ladungen, so gelten für f und für das elektrostatische Potential Φ im wirklichen Raum die Formeln

$$\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right), \qquad f = \frac{1}{\cos\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi\right)}. \tag{46}$$

Einigermaßen überraschend gestaltet sich die Einordnung des kugelsymmetrischen Falles in diese allgemeinere Theorie. Eine Euklidische Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten r, z schlitze man auf längs der auf der z-Achse durch $-m \leqq z \leqq +m$ charakterisierten Strecke. Aus zwei übereinander liegenden Exemplaren dieser geschlitzten Ebene stelle man sich eine zusammenhängende zweiblättrige Riemannsche Fläche dadurch her, daß man die Schlitzränder kreuzweise zusammenheftet, und dieses Gebilde lasse man um die z-Achse rotieren. Dann erhält man einen »zweiblättrigen« Euklidischen Raum. Auf ihn wird durch die kanonischen Koordinaten der Gesamtraum, in welchem sich das statische Feld eines »Massenpunktes« ohne Ladung befindet (vgl. den Anfang dieses Paragraphen), umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet. Der singulären Kugel, auf welcher die Masse verteilt ist, entspricht dabei der vorhin angegebene Schlitz. Von den früher benutzten »konformen« Koordinaten $x_1 x_2 x_3$, die, wenn man sie als Cartesische Koordinaten in einem Euklidischen Bildraum deutet, die konforme Abbildung des wirklichen Raumes auf den Bildraum bewirken, gelangt man zu den kanonischen, wenn man von den konformen zunächst zu den ihnen korrespondierenden Zylinderkoordinaten übergeht:

$$x_1 = r' \cos\theta', \qquad x_2 = r' \sin\theta', \qquad x_3 = z'$$

und dann in der Meridianebene die Transformation

$$(r' + iz') + \frac{(m/2)^2}{r' + iz'} = r + iz \qquad (i = \sqrt{-1})$$

durchführt.

Wie die Gesetze der Mieschen Elektrodynamik, so sind auch *die Einsteinschen Gravitationsgesetze nicht-linear*. Diese Nicht-Linearität macht sich in denjenigen Abmessungen, welche der direkten Beobachtung zugänglich sind, nicht merkbar, weil in ihnen die nichtlinearen Glieder vollständig gegenüber den linearen zu vernachlässigen sind; das hat zur Folge, daß wir in dem Kräftespiel der sichtbaren Welt das *Superpositionsprinzip* durchweg bestätigt finden. Höchstens für die seltsamen Vorgänge innerhalb des Atoms, von denen wir uns heute noch kein klares Bild machen können, kommt jene Nicht-Linearität möglicherweise in Betracht. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen liegen, namentlich was ihre Singularitäten betrifft, im Vergleich zu den linearen äußerst komplizierte, unerwartete und vorerst noch ganz und gar unbeherrschbare Verhältnisse vor, und es liegt nahe, diese beiden Dinge: das sonderbare Verhalten nichtlinearer Differentialgleichungen und die Eigentümlichkeiten intraatomistischer Vorgänge in Zusammenhang miteinander zu bringen. Die Gleichungen (45), (46) bieten ein schönes und einfaches Beispiel dafür dar, wie sich das Superpositionsprinzip in der strengen Gravitationstheorie modifiziert: die Feldpotentiale f und Φ hängen in dem einen Falle durch die Exponentialfunktion, in dem andern durch die trigonometrischen von derjenigen Größe ψ, bzw. φ ab, welche dem Superpositionsprinzip genügt. Zugleich aber zeigen jene Formeln deutlich, daß von der Nicht-Linearität der Gravitationsgleichungen für das Verständnis der Vorgänge im Atom und der Konstitution des Elektrons nichts zu erhoffen ist. Denn die Abweichungen zwischen φ und Φ werden erst dort merklich, wo $\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\varphi$ Werte annimmt, die mit 1 vergleichbar sind. Das ist aber selbst im Innern des Elektrons nicht der Fall; damit jene Abweichung für den Bau des Elektrons bedeutungsvoll würde, müßte vielmehr seine Ladung e_0 auf einen Bereich zusammengedrängt sein, dessen Radius die Größenordnung des Gravitationsradius

$$e = \frac{\sqrt{\varkappa}}{c} e_0 \sim 10^{-33} \text{ cm}$$

dieser Ladung hätte.

Bei der Ermittlung der bisher angegebenen strengen Lösungen der Gravitationsgleichungen handelte es sich immer um eine Fragestellung der folgenden Art. Bekannt sei, daß ein »kanonisches Koordinatensystem« existiert, in welchem die invariante quadratische Form $T_{ik}\,dx_i\,dx_k$ der Materie eine besondere Gestalt annimmt (z. B. eine Kombination von

$$dx_0^2, \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \qquad (x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2$$

ist mit Koeffizienten, die nur von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ abhängen: Kugelsymmetrie); dann existiert ein den Gravitationsgleichungen genügendes Schwerefeld $g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, welches in den kanonischen Koordinaten die gleiche Normalform annimmt, und es sollen aus bekannten Ansätzen für die T_{ik} in diesem kanonischen Koordinatensystem die g_{ik} ermittelt werden. Wie wir in § 16 in dem Verschwinden des Riemannschen Flächentensors der Krümmung die allgemein invariante Bedingung dafür erkannten, daß sich eine quadratische Form mittels Einführung kanonischer Koordinaten auf die »Euklidische«, durch konstante Koeffizienten ausgezeichnete Gestalt bringen läßt, so kann man sich hier die mathematische Aufgabe stellen, analog die invarianten Bedingungen dafür zu ermitteln, daß sich der quadratischen Form der Materie durch Transformation auf geeignete Koordinaten die gewünschte besondere Gestalt verleihen läßt. Wenn dies gelungen ist, können wir die Probleme, welche hier gelöst wurden, in einer dem Gedanken der allgemeinen Relativität besser entsprechenden Weise formulieren, nämlich so, daß wir dabei von besonderen »kanonischen« Koordinatensystemen keinen Gebrauch mehr machen.

Es ist klar, daß die Differentialgleichungen der Gravitation die Lösungen nicht eindeutig bestimmen können, sondern daß *Randbedingungen* hinzutreten müssen. Die von uns gefundenen Lösungen waren von solcher Art, daß die metrische Fundamentalform im räumlich Unendlichen gegen die für die spezielle Relativitätstheorie charakteristische

$$dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

konvergiert. Diese Lösungen dürfen wir als die physikalisch richtigen ansprechen, sofern wir annehmen, daß (bei Zugrundelegung der kanonischen Koordinaten) sich in weiter Entfernung große Massen befinden, die im ganzen ruhend und gleichmäßig verteilt sind. Durch diese Annahme kommen wir um das Problem der Randbedingungen in analoger Weise herum wie in der Elektrostatik, wenn wir alle Kraftlinien auf einer großen Metallkugel enden lassen. Die prinzipielle Frage ist damit aber nicht erledigt; ihre Beantwortung wird jedoch offenbar erst möglich sein, wenn wir uns über die Zusammenhangsverhältnisse der Welt im großen klar geworden sind. Von neuem werden wir hier auf dieses schon einmal angeschnittene, heute noch sehr dunkle Problem geführt, in das wir auf einen engen Weltbezirk beschränkte Wesen kaum anders als auf spekulativem Wege jemals werden Licht bringen können.

§ 32. Hamiltonsches Prinzip der Maxwell-Lorentzschen Theorie unter Berücksichtigung der Gravitation[20]).

In § 28 gelangten wir zu einem Wirkungsprinzip als dem universellen Weltgesetz; seine Anwendung auf konkrete Vorgänge scheiterte aber daran, daß uns im Grunde nur die allgemeine Form dieses Gesetzes bekannt ist, da wir nicht wissen, was für eine Funktion der unabhängigen Zustandsgrößen die in ihm auftretende Wirkungsdichte L ist. Unter diesen

Umständen ist es von Wichtigkeit, ein Prinzip zu formulieren, das freilich nicht den Anspruch eines exakt gültigen Weltgesetzes machen kann, das aber so weit trägt, als unsere Kenntnis der Materie heute sicher reicht. In einer solchen Theorie (die wir der uns vorläufig verschlossenen exakten als eine »phänomenologische« gegenüberstellen dürfen) müssen wir freilich eine der wichtigsten Erkenntnisse der Relativitätstheorie, die vom Wesen der Materie, preisgeben und auf die alte Vorstellung der sich bewegenden *Substanz* als einer ursprünglichen physikalischen Gegebenheit zurückgreifen. Es handelt sich darum, folgende Gesetze in ein einziges Wirkungsprinzip zusammenzufassen *):

1. die inhomogenen Gravitationsgleichungen (24); der Energietensor wird sich dabei allein aus demjenigen zusammensetzen, der nach der Maxwell-Lorentzschen Theorie für das elektromagnetische Feld im Äther gilt [Kap. III, Formel (22'), S. 130] und dem kinetischen Energietensor $\mu u_i u_k$ der Materie im engeren Sinne; von der feineren atomistischen Struktur der Materie und ihren noch unaufgeklärten Kohäsionskräften ist dabei also abgesehen;

2. die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen

$$(47)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik}, \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} F^{ik})}{\partial x_k} = s^i,$$

die wie in der Elektronentheorie dadurch einen konkreten Inhalt gewinnen, daß als elektrischer Strom nur Konvektionsstrom auftritt:

$$(48)\qquad s^i = \varrho u^i;$$

3. die mechanischen Gleichungen

$$(49)\qquad \mu \left(\frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} h\ l \\ i \end{matrix} \right\} u^h u^l \right) = p^i,$$

in denen der Vektor p^i die ponderomotorische Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$(50)\qquad p^i = F^{ik} s_k$$

darstellt.

Aus der invarianten quadratischen und linearen Form

$$(51)\qquad g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{und} \quad (52)\qquad \varphi_i\, dx_i,$$

welche das Gravitations- bzw. das elektromagnetische Feld darstellen, bilden wir uns wie früher (nur mit Zusatz des unwesentlichen Faktors $\frac{1}{2}$):

die *Feldwirkung der Gravitation* (in 𝔊), das über ein Weltgebiet 𝔊 erstreckte Integral $-\frac{1}{2}\int H\, d\omega$ der in Formel (23) definierten Größe H, und

die *Feldwirkung der Elektrizität:* $\frac{1}{2}\int L\, d\omega$,

$$L = L^\circ = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \qquad \left(F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right).$$

$d\omega$ ist wiederum das vierdimensionale Volumelement.

---

*) Ich verwende frühere Bezeichnungen, nur stehe μ und ϱ statt μ_0 und ϱ_0.

Die Substanz ist ein dreidimensionales Kontinuum (ihre Stellen könnten wir also in stetiger Weise auf die Wertsysteme von drei Koordinaten beziehen). Wir denken uns die Substanz in infinitesimale Elemente zerlegt; jedem Substanzelement kommt dann eine bestimmte unveränderliche positive »materielle Ladung« (Masse) dm und eine unveränderliche »elektrische Ladung« de zu; ihm korrespondiert als Ausdruck seiner Geschichte eine mit Durchlaufungssinn versehene Weltlinie. Die Bewegung der Substanz und das Schwerefeld stehen in solcher Beziehung zueinander, daß längs jeder Weltlinie

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k > 0$$

ist. Die Größe

$$\int\left\{dm\int\sqrt{g_{ik}\,dx_i\,dx_k}\right\} = \int\left\{dm\int ds\right\}, \tag{53}$$

in der sich das innere Integral über denjenigen Teil der Weltlinie eines beliebigen, mit der materiellen Ladung dm versehenen Substanzelements erstreckt, welcher innerhalb des Weltgebiets $\mathfrak{G}$ verläuft, das äußere Integral aber über die gesamte Substanz (oder über denjenigen Teil der Substanz, der während seiner Bewegung in $\mathfrak{G}$ eindringt), nenne ich die *Substanzwirkung der Gravitation*. Indem man zur Darstellung des dreidimensionalen Substanzkontinuums drei Koordinaten benutzt, erkennt man, daß es eine invariante Raum-Zeit-Funktion μ gibt von der Art, daß für jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$\int\left\{dm\int ds\right\} = \int_{\mathfrak{G}}\mu\,d\omega$$

besteht. μ heiße die absolute Massendichte, sie entspricht der »Ruhdichte« in der speziellen Relativitätstheorie.

Ersetzt man in (53) die Masse dm des Substanzelements durch seine Ladung de, die Wurzel aus der quadratischen Form (51) durch die lineare Form (52), so erhalten wir die *Substanzwirkung der Elektrizität*:

$$\int\left\{de\int\varphi_i\,dx_i\right\}. \tag{54}$$

Man sieht: die elektrische Ladung gehört in der gleichen Weise zum elektrischen Feld, wie die materielle Ladung zum Gravitationsfeld. Die absolute Ladungsdichte ϱ wäre zu definieren durch die Gleichung

$$\int\left\{de\int ds\right\} = \int_{\mathfrak{G}}\varrho\,d\omega.$$

Jetzt formuliert sich das Hamiltonsche Prinzip, welches die geforderte Zusammenfassung leistet, so:

Die Gesamtwirkung, d. h. die Summe aus Feld- und Substanzwirkung der Gravitation und Elektrizität, hat in jedem Weltgebiet einen stationären Wert gegenüber beliebigen, an den Grenzen verschwindenden Variationen des elektromagnetischen und Gravitations-Feldes und ebensolchen raumzeitlichen Verschiebungen der sich bewegenden Substanzelemente (oder ihrer Weltlinien).

Variation der g^{ik} (bei ungeändertem elektromagnetischen Feld und ungeänderten Weltlinien der Substanz) ergibt die Gravitationsgleichungen (24), Variation der elektromagnetischen Potentiale φ_i die Maxwell-Lorentzschen

Feldgleichungen (47), (48). Verschiebt man ein Stück einer Weltlinie unter Festhaltung seiner Enden unendlich wenig, so haben wir in § 17 gesehen, ist

$$\delta \int \sqrt{g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = -\int \gamma_i\, \delta x_i\, ds\,,$$

wo

$$\gamma_i = \frac{d}{ds}(g_{ik} u^k) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_i} u^h u^l\,.$$

Infolgedessen ist bei einer solchen raumzeitlichen Verschiebung der Substanzelemente, wie sie in dem eben angegebenen Wirkungsprinzip gefordert wird,

$$\delta \int \left\{dm \int \sqrt{g_{ik}\, dx_i\, dx_k}\right\} = -\int \left\{dm \int \gamma_i\, \delta x_i\, ds\right\} = -\int_{\mathfrak{G}} \mu \gamma_i\, \delta x_i \cdot d\omega\,.$$

Ermittelt man auf dem gleichen Wege die Variation, welche bei diesem Prozeß die Substanzwirkung der Elektrizität erfährt, so ergeben sich die behaupteten mechanischen Gleichungen (49). Zu den bisher erwähnten Gesetzen tritt noch die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität und der Materie.

Das so gewonnene System kann natürlich nicht aus lauter voneinander unabhängigen Gleichungen bestehen. In der Tat ist die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität eine mathematische Folge der elektromagnetischen Feldgesetze, und man überzeugt sich ferner leicht, daß die mechanischen Gesetze und die Kontinuitätsgleichung der Materie aus den elektromagnetischen Feldgleichungen und denen der Gravitation folgen. Denn aus den letzteren ergibt sich

$$(55) \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, T_i^k)}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} T^{rs} = 0\,.$$

Benutzt man ein geodätisches Koordinatensystem, so kann man sich einfach auf die in Kap. III, § 19 und § 23 für den potentiellen und kinetischen Energietensor durchgeführten Rechnungen berufen. Insbesondere geht aus § 23 hervor, daß die auf der linken Seite von (55) stehende invariante Operation, auf

$$T^{ik} = \mu u^i u^k$$

angewendet, zu

$$M u_i + \mu \gamma_i$$

führt, wo M die linke Seite der Kontinuitätsgleichung der Materie ist:

$$M = \frac{\partial (\mu u^k)}{\partial x_k}\,.$$

Es kommt also

$$M u_i + \mu \gamma_i + p_i = 0\,.$$

Indem wir mit u^i multiplizieren und nach dem Index i summieren, ergibt sich aber, da aus der Definition von p_i und γ_i folgt:

$$u^i p_i = u^i \gamma_i = 0\,,$$

die Kontinuitätsgleichung $M = 0$ und darauf die mechanischen

$$\mu \gamma_i + p_i = 0\,.$$

Durch die Gegenüberstellung des gegenwärtigen Hamiltonschen Prinzips, in welchem die Wirkungsdichte eine vollständig bekannte Funktion der unabhängigen Zustandsgrößen ist, und des in größere Tiefen hinabreichenden in § 28 formulierten Prinzips, das aber für uns heute noch ein unausgefülltes Schema bleiben muß, wird der Kontrast zwischen *Substanzphysik* und reiner *Feldphysik* besonders deutlich. Es bleibt bemerkenswert, daß auch bei Festhaltung des Substanzbegriffs die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik samt der relativistischen Mechanik und der Gravitation sich auf ein einziges Wirkungsprinzip zurückführen läßt. Die Existenz des Elektrons freilich kann diese Theorie nicht erklären, weil in ihr Kohäsionskräfte fehlen; aber an diesem Punkte ist eben auch unsere gegenwärtige Kenntnis von der Materie zu Ende.

§ 33. Betrachtungen über die Welt als Ganzes.

Die allgemeine Relativitätstheorie läßt es durchaus dahingestellt, ob die Weltpunkte in umkehrbar-eindeutiger und stetiger Weise durch die Werte von 4 Koordinaten x_i dargestellt werden können. Sie setzt lediglich voraus, daß die *Umgebung* eines jeden Weltpunktes eine umkehrbar-eindeutige stetige Abbildung auf ein Gebiet des vierdimensionalen »Zahlenraumes« gestattet (wobei unter »Punkt des vierdimensionalen Zahlenraumes« jedes Zahlenquadrupel verstanden ist); über den Zusammenhang der Welt im ganzen macht sie von vornherein keine Annahmen. — Wenn wir in der Flächentheorie von einer Parameterdarstellung der zu untersuchenden Fläche ausgehen, so bezieht sich diese auch immer nur auf ein Flächenstück, nicht aber auf die ganze Fläche, die im allgemeinen keineswegs eindeutig und stetig auf die Euklidische Ebene oder ein ebenes Gebiet abgebildet werden kann. Von denjenigen Eigenschaften der Flächen, die bei allen eineindeutigen stetigen Abbildungen erhalten bleiben, handelt die *Analysis situs*; die *Geschlossenheit* ist z. B. eine derartige Analysis-situs-Eigenschaft. Jede Fläche, die aus der Kugel durch stetige Deformation hervorgeht, ist auf dem Standpunkt der Analysis situs von der Kugel nicht verschieden, wohl aber z. B. der Torus. Auf dem Torus gibt es nämlich geschlossene Linien, welche den Torus nicht in mehrere Gebiete zerlegen, auf einer Kugel existieren derartige Linien nicht. Aus der Geometrie auf der Kugel ging jene »sphärische Geometrie«, welche wir in § 10 mit Riemann der Bolyai-Lobatschefskyschen gegenüberstellten, dadurch hervor, daß wir je zwei einander diametral gegenüberliegende Kugelpunkte identifizierten. Die so entstehende Fläche $\mathfrak{F}$ ist von der Kugel gleichfalls im Sinne der Analysis situs verschieden, und zwar durch diejenige Eigenschaft, welche man als ihre Einseitigkeit bezeichnet. Denkt man sich ein kleines, auf einer Fläche liegendes, beständig im gleichen Sinne rotierendes Rädchen während der Rotation über diese Fläche hinbewegt, wobei der Mittelpunkt eine geschlossene Bahn beschreibe, so sollte man erwarten, wenn das Rädchen wieder an seinen Ausgangsort zurückkehrt, so rotiere es hier im gleichen Sinne wie im Anfang seiner

Bewegung. Ist dies der Fall, welche geschlossene Kurve der Mittelpunkt des Rädchens auch auf der Fläche beschrieben haben mag, so heißt sie *zweiseitig*; im andern Falle aber *einseitig*. Daß es einseitige Flächen gibt, ist zuerst von Möbius bemerkt worden. Die oben erwähnte Fläche $\mathfrak{F}$ ist einseitig, während die Kugel natürlich zweiseitig ist. Man sieht das ohne weiteres ein, wenn man den Mittelpunkt des Rädchens einen größten Kreis durchlaufen läßt; auf der Kugel muß der *ganze* Kreis durchlaufen werden, ehe diese Bahn sich schließt, auf $\mathfrak{F}$ jedoch nur der *halbe*. — Ganz analog wie eine zweidimensionale kann nun auch eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sehr verschiedenerlei Analysis-situs-Beschaffenheit besitzen. Aber auf jeder vierdimensionalen Mannigfaltigkeit läßt sich die Umgebung eines Punktes gewiß in stetiger Weise durch 4 Koordinaten darstellen derart, daß verschiedenen Punkten dieser Umgebung immer verschiedene Koordinatenquadrupel korrespondieren. Genau in diesem Sinne ist die Benutzung der 4 Weltkoordinaten zu verstehen.

Von jedem Weltpunkt geht der Doppelkegel der aktiven Zukunft und der passiven Vergangenheit aus. Während in der speziellen Relativitätstheorie diese durch ein Zwischengebiet getrennt sind, ist es hier an sich sehr wohl möglich, daß der Kegel der aktiven Zukunft über den der passiven Vergangenheit hinübergreift; es kann also prinzipiell geschehen, daß ich jetzt Ereignisse miterlebe, die zum Teil erst eine Wirkung meiner künftigen Entschlüsse und Handlungen sind. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß eine Weltlinie, obschon sie in jedem Punkte zeitartige Richtung besitzt, insbesondere die Weltlinie meines Leibes, in die Nähe eines Weltpunktes zurückkehrt, den sie schon einmal passierte. Daraus würde dann ein radikaleres Doppelgängertum resultieren, als es je ein E. T. A. Hoffmann ausgedacht hat. Tatsächlich kommen ja so erhebliche Variabilitäten der g_{ik}, wie dazu erforderlich wären, in dem Weltgebiet, in welchem wir leben, nicht vor; doch hat es ein gewisses Interesse, diese Möglichkeiten durchzudenken mit Rücksicht auf das philosophische Problem des Verhältnisses von kosmischer und phänomenaler Zeit. So Paradoxes da zutage kommt, ein eigentlicher Widerspruch zu den in unserem Erleben unmittelbar gegebenen Tatsachen tritt nirgendwo hervor.

In § 25 sahen wir, daß ohne Berücksichtigung der Gravitation die elektrodynamischen Grundgesetze (nach Mie) eine solche Gestalt besitzen, wie sie durch das *Kausalitätsprinzip* gefordert ist: die Ableitungen der Zustandsgrößen nach der Zeit drücken sich aus durch diese Größen selber und ihre räumlichen Differentialquotienten. Diese Tatsachen bleiben bestehen, wenn wir die Gravitation mit hereinziehen und somit die Tabelle der Zustandsgrößen φ_i, F_{ik} durch die g_{ik} und $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ erweitern. Wegen der allgemeinen Invarianz der Naturgesetze muß aber die Behauptung dahin formuliert werden, daß aus den Werten der Zustandsgrößen für einen Moment alle diejenigen Aussagen über sie, *welche invarianten Charakter tragen*, auf Grund der Naturgesetze folgen; und es muß ferner

beachtet werden, daß diese Behauptung sich nicht auf die Welt als Ganzes, sondern nur jeweils auf einen durch 4 Koordinaten darstellbaren Ausschnitt beziehen kann. Wir verfahren mit Hilbert folgendermaßen [21]. In der Umgebung des Weltpunktes O führen wir 4 Koordinaten x_i ein, so daß in O selber

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird. Wir können in dem dreidimensionalen Raum $x_0 = 0$ um O eine solche Umgebung $\mathfrak{R}$ abgrenzen, daß in ihr durchweg $-ds^2$ positiv-definit bleibt. Durch jeden Punkt dieser Umgebung ziehen wir die zu jenem Raum orthogonale geodätische Weltlinie, die zeitartige Richtung besitzt. Diese werden eine gewisse vierdimensionale Umgebung von O einfach überdecken. Wir führen jetzt neue Koordinaten ein, die freilich in dem dreidimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ mit den bisherigen übereinstimmen; wir schreiben nämlich demjenigen Punkte P, zu welchem wir gelangen, wenn wir von dem Punkt $P_0 = (x_1\, x_2\, x_3)$ in $\mathfrak{R}$ auf der durch ihn hindurchlaufenden orthogonalen geodätischen Weltlinie so weit gehen, daß die Eigenzeit des durchlaufenen Bogens $P_0 P$ gleich x_0 ist, jetzt die Koordinaten $x_0\, x_1\, x_2\, x_3$ zu. Diese geodätischen Koordinaten sind von Gauß in der Flächentheorie eingeführt worden (vgl. auch § 14). Da auf jeder der geodätischen Linien $ds^2 = dx_0^2$ ist, muß bei Benutzung dieses Koordinatensystems identisch in allen vier Koordinaten

$$g_{00} = 1 \tag{56}$$

sein. Weil die Linien orthogonal sind zu dem dreidimensionalen Raum $x_0 = 0$, ist für $x_0 = 0$:

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0\,. \tag{57}$$

Da ferner diejenigen Linien, welche man erhält, wenn man $x_1\, x_2\, x_3$ konstant läßt und nur x_0 variiert, geodätisch sind, muß (siehe die Gleichung der geodätischen Linien)

$$\begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

werden, mithin auch

$$\begin{bmatrix} 0\,0 \\ i \end{bmatrix} = 0\,.$$

Unter Berücksichtigung von (56) folgt daraus

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x_0} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)\,,$$

und wegen (57) ist infolgedessen nicht nur für $x_0 = 0$, sondern identisch in allen vier Koordinaten

$$g_{0i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)\,. \tag{58}$$

Wir haben folgende Figur vor uns: eine Schar von geodätischen Linien mit zeitartiger Richtung, welche ein gewisses Weltgebiet einfach und lückenlos überdecken und eine ebensolche einparametrige Schar von dreidimen-

sionalen Räumen $x_0 =$ konst. Gemäß (58) sind diese beiden Scharen überall zueinander orthogonal; und die auf den geodätischen Linien durch zwei der »parallelen« Räume $x_0 =$ konst. abgeschnittenen Bogenstücke haben alle die gleiche Eigenzeit. Benutzen wir dieses besondere Koordinatensystem, so ist

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_0} = -2\begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

und die Gravitationsgleichungen gestatten, die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

außer durch die φ_i und ihre Ableitungen auszudrücken durch die g_{ik}, deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach $x_1\ x_2\ x_3$ und die $\begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix}$ selber. Indem wir also die 12 Größen

$$g_{ik}, \qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

neben den elektromagnetischen als die Unbekannten betrachten, geht das gewünschte Resultat hervor (wobei x_0 die Rolle der Zeit spielt). Der von einem Punkt O' mit positiver x_0-Koordinate gelegte Kegel der passiven Vergangenheit wird aus $\mathfrak{R}$ ein gewisses Stück $\mathfrak{R}'$ herausschneiden, das mit dem Mantel jenes Kegels zusammen ein endliches Weltgebiet $\mathfrak{G}$ (eine Kegelhaube mit Spitze in O') begrenzt. Wenn unsere Behauptung, daß die geodätischen Nullinien die Einsatzpunkte jeder Wirkung bezeichnen, streng richtig ist, muß der Satz gelten, daß durch die Werte der erwähnten 12 Größen, dazu der elektromagnetischen Potentiale φ_i und Feldgrößen F_{ik} in dem dreidimensionalen Raumgebiet $\mathfrak{R}'$ deren Werte im Weltgebiet $\mathfrak{G}$ vollständig bestimmt sind. Er ist bisher nicht bewiesen worden. *Auf jeden Fall aber erkennt man, daß die Differentialgleichungen des Feldes die vollständigen Naturgesetze enthalten* und nicht etwa noch eine weitere Eingrenzung durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen oder dgl. stattfinden kann.

Einstein gelangte bei kosmologischen Betrachtungen über den Zusammenhang der Welt im großen [22]) zu der Vermutung, daß sie räumlich geschlossen sei. Wie in der Newtonschen Gravitationstheorie das in der Poissonschen Gleichung ausgesprochene Nahewirkungsgesetz das Newtonsche Attraktionsgesetz nur nach sich zieht, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß das Gravitationspotential im Unendlichen verschwindet, so sucht Einstein zunächst auch in seiner Theorie die Differentialgleichungen durch Randbedingungen im räumlich-Unendlichen zu ergänzen. Der Unmöglichkeit gegenüber, solche Bedingungen allgemein invarianten Charakters zu formulieren, welche mit den astronomischen Tatsachen im Einklang stehen, findet er als einzigen Ausweg die Annahme, daß die Welt räumlich geschlossen sei; denn unter dieser Annahme fallen Randbedingungen

natürlich fort. Dieser Argumentation kann ich zufolge dem oben Ausgeführten keine Beweiskraft zugestehen, da die Differentialgleichungen für sich schon ohne Randbedingungen die vollständigen, jede Unbestimmtheit ausschließenden Naturgesetze enthalten. Um so mehr Gewicht besitzt eine andere Überlegung, die von der Frage ausgeht: Wie kommt es, daß unser Fixsternsystem, mit relativen Sterngeschwindigkeiten, die außerordentlich klein sind (gegen die Lichtgeschwindigkeit), besteht und sich erhält und nicht längst in die Unendlichkeit auseinander gestoben ist? Es gewährt dieses System durchaus den gleichen Anblick, wie ihn die Moleküle eines im Gleichgewicht befindlichen Gases einem Beobachter von entsprechend kleineren Dimensionen darbieten würden. Auch im Gas ruhen die einzelnen Moleküle nicht, aber unter den Geschwindigkeiten sind gemäß dem Maxwellschen Verteilungsgesetz die kleinen ganz außerordentlich viel zahlreicher vertreten als die großen, und die Verteilung der Moleküle über das Gasvolumen ist eine im Mittel gleichmäßige, so daß beobachtbare grobe Dichteverschiedenheiten außerordentlich selten sind. Ist diese Analogie stichhaltig, so könnten wir den Zustand des Fixsternsystems und seines Gravitationsfeldes nach den gleichen *statistischen Prinzipien* verstehen, die uns lehren, daß ein abgeschlossenes Gas sich fast immer im Gleichgewichtszustand befindet. Das wäre aber nur dann möglich, wenn die *gleichmäßige Verteilung ruhender Sterne in einem statischen Gravitationsfeld* als idealer Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen verträglich ist. In einem statischen Gravitationsfeld ist die Weltlinie eines ruhenden Massenpunktes, d. h. eine Linie, auf welcher $x_1\, x_2\, x_3$ konstant bleiben und nur x_0 variiert, eine geodätische, wenn

$$\left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ i \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und daher

$$\left[\begin{matrix} 0\,0 \\ i \end{matrix} \right] = 0, \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} = 0$$

ist. Eine ruhende Massenverteilung ist mithin nur dann möglich, wenn

$$\sqrt{g_{00}} = f = \text{konst.} = 1$$

ist. Die Gleichung

(27) $$\frac{\Delta_2 f}{f} = \tfrac{1}{2}\mu_0 \qquad (\mu_0 = \text{Massendichte})$$

zeigt dann aber, daß der ins Auge gefaßte ideale Gleichgewichtszustand mit den Gravitationsgesetzen, wie wir sie bisher angenommen haben, *unverträglich* ist.

Bei der Herleitung der Gravitationsgleichungen in § 28 haben wir aber eine kleine Unterlassungssünde begangen. Es ist nicht R die einzige von g_{ik}, ihren 1. und 2. Differentialquotienten abhängige und in den letzteren lineare Invariante, sondern die allgemeinste Invariante dieser Art hat die Gestalt $\alpha R + \beta$, wo α und β numerische Konstante sind. Infolgedessen können wir die Gravitationsgesetze so verallgemeinern, daß

wir R (oder H) durch $R - \lambda$ (bzw. $H - \lambda$) ersetzen, wo λ eine universelle Konstante bedeutet. Ist sie nicht $= 0$, wie wir bis anhin vorausgesetzt haben, sondern $\neq 0$, so können wir sie $= 1$ nehmen; dadurch wird dann, nachdem durch das Relativitätsprinzip die Zeiteinheit, durch das Gravitationsgesetz die Masseneinheit auf die der Länge zurückgeführt war, auch noch die Längeneinheit in absoluter Weise festgelegt. Bei dieser Modifikation ergeben die Gravitationsgleichungen, wenn wir für die Komponenten T_{ik} die für ruhende Materie (im engeren Sinne) charakteristischen Werte verwenden, die Gleichung $f = 1$ berücksichtigen und die Bezeichnungen aus § 29 benutzen,

$$\lambda = \mu_0 \quad [\text{anstelle von } (27)] \text{ und}$$

(59) $$\mathsf{P}_{ik} + \lambda \gamma_{ik} = 0 \,.$$

Jener ideale Gleichgewichtszustand ist unter diesen Umständen also möglich, wenn die Masse sich mit der Dichte λ verteilt. Der Raum muß dann metrisch homogen sein; und in der Tat sind die Gleichungen (59) erfüllt für einen sphärischen Raum vom Radius $a = \sqrt{2/\lambda}$. Wir können also im Raum vier an die Bedingung

(60) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

geknüpfte Koordinaten einführen, für die

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

wird. *Der Raum stellt sich als geschlossen und daher endlich heraus.* Wenn dieses nicht der Fall wäre, könnte man sich auch kaum vorstellen, wie ein statistisches Gleichgewicht zustande kommen sollte. Noch wäre zu fragen, ob die Punkte des Raumes den der Bedingung (60) genügenden Wertequadrupeln x_i umkehrbar-eindeutig entsprechen oder ob je zwei Wertsystemen

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \quad \text{und} \quad (-x_1\,,\; -x_2\,,\; -x_3\,,\; -x_4)$$

derselbe Punkt entspricht. Diese beiden Möglichkeiten sind analysis-situsmäßig verschieden, wenngleich beide Räume (im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall) zweiseitig sind. Je nachdem die eine oder andere zutrifft, wäre die Gesamtmasse der Welt in gr:

$$\frac{\pi a}{2\varkappa}\,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi a}{4\varkappa}\,.$$

Die zentral-symmetrischen Lösungen der modifizierten homogenen Gravitationsgleichungen, die einer masseleeren Welt entsprechen würden, ergeben sich aus dem Variationsprinzip (Bezeichnungen siehe § 30):

$$\delta \int (2 w \Delta' - \lambda \Delta r^2)\, dr = 0\,.$$

Die Variation von w ergibt wie früher $\Delta = 1$; die Variation von Δ hingegen

(61) $$w' = -\frac{\lambda}{2} r^2 .$$

Verlangen wir Regularität bei $r = 0$, so folgt daraus

$$w = -\frac{\lambda}{6} r^3,$$

(62) $$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2.$$

Der Raum läßt sich kongruent auf eine »Sphäre«

(63) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3a^2$$

vom Radius $a\sqrt{3}$ im vierdimensionalen Euklidischen Raum abbilden (wobei unserm Zentrum einer der beiden Pole auf der Sphäre entspricht, deren erste drei Koordinaten $x_1, x_2, x_3 = 0$ sind). Aber da f auf der »größten Kugel« $x_4 = 0$, welche man als Äquator oder Raumhorizont für jenes Zentrum bezeichnen könnte, $= 0$ wird, daselbst die metrische Fundamentalform der Welt also singulär wird, so sieht man, daß die Möglichkeit einer leeren Welt den Naturgesetzen, die wir hier als gültig betrachten, widerstreitet. Zum mindesten am Horizont müssen sich Massen befinden. Die Rechnung läßt sich am einfachsten durchführen, wenn wir (lediglich zur Orientierung) dort eine inkompressible Flüssigkeit annehmen. Das zu lösende Variationsproblem lautet nach § 31 bei Verwendung der damaligen Bezeichnungen und unter Hinzufügung des λ-Gliedes

$$\delta \int \left\{ \Delta' w - \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 \Delta + r^2 v h \right\} dr = 0;$$

gegen früher ist also nur die Änderung eingetreten, daß die Konstante μ_0 durch $\mu_0 + \frac{\lambda}{2}$ zu ersetzen ist. Wie dort folgt

$$w' + \left(\mu_0 + \frac{\lambda}{2} \right) r^2 = 0, \qquad w = 2M - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^3,$$

(64) $$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu_0 + \lambda}{6} r^2.$$

Befindet sich die Flüssigkeit zwischen den beiden Breitenkugeln $x_4 = \text{konst.}$, welche den Radius r_0 $(< a\sqrt{3})$ besitzen, so verlangt der stetige Anschluß an (62), daß die Konstante

$$M = \frac{\mu_0}{6} r_0^3$$

ist. $\frac{1}{h^2}$ wird (in erster Ordnung) 0 für einen Wert $r = a^*$ zwischen r_0 und $a\sqrt{3}$. Der Raum läßt sich daher immer noch auf die Sphäre (63) abbilden, aber diese Abbildung ist in der von Flüssigkeit erfüllten Zone nicht mehr kongruent. Die Gleichung für Δ (S. 211 oben) liefert jetzt ein f, das auf dem Äquator nicht verschwindet. Die Grenzbedingung verschwindenden Drucks ergibt eine transzendente Relation zwischen μ_0 und r_0.

Die allgemeine Lösung von (61) lautet

$$\frac{1}{h^2} = f^2 = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6} r^2 \quad (m = \text{konst.}). \tag{65}$$

Sie entspricht dem Fall, daß um das Zentrum eine Massenkugel liegt. Nur in einer Zone $r_0 \leqq r \leqq r_1$, in welcher dieses f^2 positiv ist, kann die Welt masseleer sein. Besteht sowohl die Massenkugel wie der erforderliche »Massenhorizont« aus inkompressibler Flüssigkeit von der Dichte μ_0 bzw. μ_1, so haben wir für die erstere z. B.

$$h = \frac{b_0}{z}; \quad b_0^2 = \frac{6}{2\mu_0 + \lambda},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 \equiv r^2 + z^2 = b_0^2. \tag{66}$$

Das Innere der Kugel kann daher kongruent auf die kleinere der beiden Kalotten abgebildet werden, in welche die Sphäre (66) durch die Breitenkugel vom Radius r_0 zerfällt; während sich der »Massenhorizont«, der mehr als die Hälfte des Raumes einnimmt, kongruent auf die *größere* der beiden Kalotten abbilden läßt, in welche die Sphäre vom Radius b_1 durch die Breitenkugel $r = r_1$ zerlegt wird. Der stetige Anschluß an die im leeren Raume geltende Lösung (65) verlangt

$$m = \frac{\mu_0 r_0^3}{6} = \frac{\mu_1 r_1^3}{6}.$$

Für f ergibt die gleiche Überlegung wie auf S. 211 innerhalb der Massenkugel

$$(2\mu_0 + \lambda) \cdot f = \frac{3\mu_0}{h_0} + \frac{\lambda - \mu_0}{h}$$

und eine analoge Formel innerhalb des Massenhorizonts; f darf weder hier noch dort den Wert 0 annehmen. — So verhält es sich, wenn von den beiden oben erwogenen Analysis-situs-Möglichkeiten die erste zutrifft; im andern Falle besteht der Massenhorizont aus einer Zone (die beliebig schmal genommen werden kann).

Vielleicht sind wir, den eben angestellten Betrachtungen nachhängend, allzusehr den Lockungen einer sich ins Leere emporschwingenden Phantasie gefolgt. Doch helfen sie verdeutlichen, was alles auf Grund der neu gewonnenen Auffassungen über Raum und Zeit im Bereiche der *Möglichkeit* liegt. Wer auf den durchmessenen Weg zurückschaut und in einem einzigen Blick das Ganze umspannt, was nur sukzessive und in ein gegliedertes Mannigfaltige aufgelöst zur Darstellung kommen konnte, muß von dem Gefühl errungener *Freiheit* überwältigt werden, von dem mächtigen Eindruck einer entschrankenden Tat, durch welche das Denken einen engen festgefügten Käfig sprengte, in den es bisher gebannt war; einer Tat, welche auf dem Felde der Naturerkenntnis wohl mit der des Kopernikus in eine Linie gestellt werden kann (wenn auch durchaus nicht von ihr eine so mächtige Wirkung auf die allgemeine Kultur zu erwarten ist).

Je weiter sich die Physik entwickelt, um so deutlicher wird es, daß die Beziehungen zwischen der Wirklichkeit, die jeder von uns lebt, und jenen objektiven Wesenheiten, von denen die Physik in mathematischen Symbolen handelt, durchaus nicht so einfach sind, wie es der naiven Auffassung erscheint, und daß von dem *Inhaltlichen* jener unmittelbar erfahrenen Wirklichkeit in die physikalische Welt im Grunde nichts eingeht. Immer klarer tritt zutage, daß die Physik eine Wissenschaft von genau dem gleichen Gepräge ist wie es die Geometrie war, die jetzt von ihr aufgesogen wird. Maxwellsche Theorie und analytische Geometrie sind sich in ihrer mathematischen Konstitution zum Verwechseln ähnlich. Die Physik, das stellt sich damit heraus, handelt gar nicht von dem Materiellen, Inhaltlichen der Wirklichkeit, sondern, was sie erkennt, ist lediglich deren *formale Verfassung*. Sie hat für die Wirklichkeit die gleiche Bedeutung wie die formale Logik für das Reich der Wahrheit. Was die formale Logik lehrt, gründet gewiß im Wesen der Wahrheit, und keine Wahrheit verletzt ihre Gesetze. Ob aber eine konkrete Behauptung wahr ist oder nicht, darüber lehrt sie schlechterdings nichts, das Inhaltliche der Wahrheit läßt sie gänzlich dahingestellt; der Grund der Wahrheit eines Urteils liegt in der beurteilten Sache und nicht in der Logik. Ich meine, daß die Physik es nur mit dem zu tun hat, was in einem genau analogen Sinne als formale Verfassung der Wirklichkeit zu bezeichnen wäre. Ihre Gesetze werden ebensowenig in der Wirklichkeit jemals verletzt, wie es Wahrheiten gibt, die mit der Logik nicht im Einklang sind; aber über das inhaltlich-Wesenhafte dieser Wirklichkeit machen sie nichts aus, der Grund der Wirklichkeit wird in ihnen nicht erfaßt. Wenn es der Wahn der scholastischen Methode ist, aus bloß Formalem Wesenhaftes deduzieren zu wollen, so ist die Weltanschauung, welche man als Materialismus bezeichnet, nur eine Spielart der Scholastik.

Literatur.

Einleitung und Kapitel I.

1) Die präzise Fassung dieser Gedanken lehnt sich aufs engste an Husserl an, »Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie« (Jahrbuch f. Philos. u. phänomenol. Forschung, Bd. 1, Halle 1913).

2) Eine eingehende Analyse dieses Problems, insbesondere der begrifflichen Schwierigkeiten, welche mit dem Kontinuum verbunden sind, enthält die vor kurzem erschienene Schrift des Verfassers »Das Kontinuum« (Leipzig 1918).

3) Helmholtz hat in der Arbeit »Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen« (Nachr. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Kl., 1868) den ersten Versuch gemacht, die Geometrie auf die Eigenschaften der Bewegungsgruppe zu stützen. Eine schärfere mathematische Fassung und Lösung fand dieses »Helmholtzsche Raumproblem« in den Arbeiten von S. Lie (Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Kl., 1890) mit Hilfe der von Lie geschaffenen Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen (man vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3, Abt. 5). Im Geiste der Mengenlehre sind die zugrunde liegenden Voraussetzungen dann von Hilbert weitgehend eingeschränkt worden (Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909, Anhang IV).

4) Für die systematische Behandlung der affinen Geometrie, unter Abstreifung der speziellen Dimensionszahl 3, ist wie für das Gesamtgebiet des geometrischen Kalküls Grassmanns »Lineale Ausdehnungslehre« (Leipzig 1844) das bahnbrechende Werk. In der Konzeption des Begriffs einer mehr als dreidimensionalen Mannigfaltigkeit sind Grassmann sowohl als Riemann durch die philosophischen Ideen Herbarts beeinflußt.

5) Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917), S. 190.

Kapitel II.

1) Zu genauerer Orientierung sei auf das in der Teubnerschen Sammlung »Wissenschaft und Hypothese« (Bd. IV) erschienene Buch von Bonola und Liebmann, »Die Nicht-Euklidische Geometrie«, verwiesen.

2) F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4 1871), S. 573. Vgl. auch die ferneren Abhandlungen in Math. Ann. Bd. 6 (1873), S. 112 und Bd. 37 (1890), S. 544.

3) Sixth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, t. 149 (1859).

4) Mathematische Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, S. 272.

5) Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, Giorn. di Matem. t. VI 1868), S. 204; Opere Matem. (Höpli 1902), t. I, S. 374.

6) Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., Leipzig 1909), Anhang V.

7) Vgl. die Zitate Kap. I,[3]). Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journ. f. d. reine und angew. Mathematik Bd. 70 (1869); Lipschitz, im gleichen Journal Bd. 70 (1869), S. 71, und Bd. 72 (1870), S. 1.

8) Christoffel, l. c.[7]). Ricci und Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. Bd. 54 (1901). Wesentliche Vereinfachungen bringen die schon unter dem Zeichen der Einsteinschen Gravitationstheorie erschienenen Arbeiten: Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ..., Rend. del Circ. Matem. di Palermo, t. 42 (1917), und Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917).

9) Ihn haben wir der zuletzt erwähnten Arbeit Levi-Civitas entnommen. Zu seiner Herleitung nimmt Levi-Civita an, daß der Riemannsche Raum in einen höher dimensionalen Euklidischen eingebettet ist. Demgegenüber dürfte unsere Begründung, die auf dem Begriff des geodätischen Koordinatensystems beruht, den Vorzug verdienen.

10) Dieser Beweis der Symmetrieeigenschaften der Riemannschen Krümmung rührt von Hessenberg (l. c.) her, nachdem er früher immer auf rechnerischem Wege erbracht war.

11) Vgl. z. B. Levi-Civita, Rend. di Palermo l. c.[8]), §§ 17, 18.

Kapitel III.

1) Wegen der Literatur zu der »speziellen Relativitätstheorie«, um die es sich in diesem Kapitel handelt, verweisen wir ein für allemal auf das Buch von Laue, Das Relativitätsprinzip (2. Aufl., Braunschweig 1913).

2) Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akademie, März 1876, oder Ges. Abhandlungen Bd. I (1882), S. 791. Eichenwald, Annalen der Physik Bd. 11 (1903), S. 1.

3) Das gilt nicht ganz ohne Einschränkung; siehe A. Korn, Mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes, eine Reihe von Abhandlungen in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 18 u. 19 (1917/18).

4) A. A. Michelson, Sill. Journ. Bd. 22 (1881), S. 120. A. A. Michelson und E. W. Morley, ebenda Bd. 34 (1887), S. 333. E. W. Morley und D. C. Miller, Philosophical Magazine Bd. 8 (1904), S. 753 und Bd. 9 (1905), S. 680. H. A. Lorentz, Arch. Néerl. Bd. 21 (1887), S. 103 oder Ges. Abhandl. Bd. I, S. 341. Seit Aufstellung der Relativitätstheorie durch Einstein ist das Experiment vielfach diskutiert worden.

5) Vgl. z. B. Trouton und Noble, Proc. Roy. Soc. Bd. 72 (1903), S. 132. Lord Rayleigh, Philos. Mag. Bd. 4 (1902), S. 678; D. B. Brace, ebenda Bd. 7 (1904), S. 317, Bd. 10 (1905), S. 71 u. 591; B. Strasser, Annal. d. Physik Bd. 24 (1907), S. 137. Des Coudres, Wiedemanns Annalen Bd. 38 (1889), S. 71. Trouton und Rankine, Proc. Roy. Soc. Bd. 8 (1908), S. 420.

6) Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annal. d. Physik Bd. 17 (1905), S. 891.

7) Die mathematische Durchbildung der Relativitätstheorie, namentlich ihre Auffassung als Weltgeometrie, verdankt man erst H. Minkowski. Siehe dessen Abhandlung »Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern«, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1908, S. 53, oder Ges. Abhandl. Bd. II, S. 352.

8) Möbius, Der baryzentrische Calcül (Leipzig 1827; oder Werke, Bd. I), Kap. 6 u. 7.

9) Wilson, Philosoph. Transact. (A) Bd. 204 (1904), S. 121.

10) Röntgen, Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1885, S. 195; Wied. Annalen Bd. 35 (1888), S. 264, und Bd. 40 (1890), S. 93. Eichenwald, Annalen d. Physik Bd. 11 (1903), S. 421.

11) Minkowski l. c.[7]).

12) W. Kaufmann, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1902, S. 291; Ann. d. Physik Bd. 19 (1906), S. 487, u. Bd. 20 (1906), S. 639. A. H. Bucherer, Ann. d. Physik Bd. 18 (1909), S. 513, u. Bd. 29 (1909), S. 1063. S. Ratnowsky, Determination experimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse, Dissertation, Genf 1911. E. Hupka, Ann. d. Physik Bd. 31 (1910), S. 169.

13) Das Relativitätsprinzip (2. Aufl., 1913), S. 208.

14) Einstein l. c.[6]). Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr. Bd. 9 (1908), S. 828; Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. d. Physik Bd. 26 (1908), S. 1.

15) Herglotz, Ann. d. Physik Bd. 36 (1911), S. 453.

16) Ann. d. Physik, Bd. 37, 39, 40 (1912/13).

Kapitel IV.

1) Vgl. für diesen Paragraphen wie für das ganze Kapitel A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig, Joh. Ambr. Barth, 1916); Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich; Sammlung Vieweg, 2. Aufl. 1917). E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen

Gravitationstheorie (Springer 1916). M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik (Springer 1917). E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, Ann. Phys. Bd. 53 (1917), S. 575.

2) Schon Newton empfand die Schwierigkeit; am nachdrücklichsten ist sie von E. Mach ausgesprochen worden. Vgl. die eingehenden Literaturangaben bei A. Voss, Die Prinzipien der rationellen Mechanik, in der Mathematischen Enzyklopädie, Bd. IV Art. 1, Absatz 13—17 (phoronomische Grundbegriffe).

3) Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII (1890).

4) Über andere Versuche (Abraham, Mie, Nordström), die Theorie der Gravitation der durch die spezielle Relativitätstheorie geschaffenen Lage anzupassen, orientiert übersichtlich M. Abraham, Neuere Gravitationstheorien, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Bd. XI (1915), S. 470.

5) Die Grundlagen der Physik (1. Mitteilung), Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1915. Hier ist auch der Zusammenhang zwischen Hamiltonscher Funktion und Energie-Impuls-Tensor aufgestellt und wurden, etwa gleichzeitig mit Einstein, wenn auch nur im Rahmen der Mieschen Theorie, die Gravitationsgleichungen ausgesprochen.

6) Weyl, Annal. d. Physik. Bd. 54 (1917), S. 117 (§ 2). Siehe ferner vier Mitteilungen von H. A. Lorentz, Über die Einsteinsche Gravitationstheorie, in den Versl. K. Akad. van Wetensch. 1915/16. Klein, Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, Gött. Nachr., Sitzung v. 25. Jan. 1918.

7) Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1915, 44, S. 778, mit Nachtrag auf S. 799.

8) Eine andere Herleitung des Energieprinzips bei Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 42, S. 1111.

9) Hilbert, Die Grundlagen der Physik, 1. und 2. Mitteilung (Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915 u. 1917).

10) Nach Levi-Civita, Statica Einsteiniana, Rend. della R. Accad. dei Lincei 1917, vol. XXVI, ser. 5ª, 1º sem., pag. 458.

11) Die näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, wie sie der Beschränkung auf die linearen Glieder entspricht, ist allgemein, auch für nichtstatische Felder, von Einstein durchgeführt worden in Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 688. Dazu die Ergänzung: Über Gravitationswellen, ebenda 1918, S. 154. Die Integration geschieht durch retardierte Potentiale (Ausbreitung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit). Ein interessante Anwendung gibt H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschrift Bd. 19 (1918), S. 33.

12) Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1915, 47, S. 831.

13) Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 7, S. 189.

14) Am meisten Beachtung fand die Hypothese von H. Seeliger, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Akad. Ber. 36 (1906). Vgl. dazu E. Freundlich, Astr. Nachr. Bd. 201 (Juni 1915), S. 49.

15) Vgl. Schwarzschild l. c.[13]); Hilbert l. c.[9]), 2. Mitt.; J. Droste, Versl. K. Akad. van Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 163.

16) Vom n-Körper-Problem handelt J. Droste, Versl. K. Akad. van Wetensch. Bd. 25 (1916), S. 460.

17) L. Flamm, Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschr. Bd. 17 (1916), S. 449.

18) Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, 18, S. 424.

19) Weyl l. c.[6]), §§ 5, 6.

20) Desgl., § 1.

21) Hilbert l. c.[9]), 2. Mitt.

22) Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917, 6, S. 142. Siehe auch de Sitter, Amsterdam Proc. Bd. 19 (1917), S. 527.

Sachregister.

(Die Zahlen verweisen, wenn nichts anderes bemerkt ist, auf die Seiten des Buchs.)

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.